LE MODÈLE LOCAL DES REPRÉSENTATIONS GALOISIENNES

par

Stefano Morra

Les espaces de déformation des représentations galoisiennes, introduits par Barry Mazur en [**Maz89**], se sont immédiatement imposés comme l'un des outils les plus féconds pour aborder des questions profondes en arithmétiques ([**MT90, HT94, FM95**] pour en citer les premiers dans l'ordre chronologique) et utilisés de manière spectaculaire dans [**Wil95, TW95**] pour la preuve du dernier théorème de Fermat puis dans [**BCDT01, Kis09b**] pour la preuve de la conjecture de Shimura–Taniyama–Weil. En effet, pour aborder des questions arithmétiques, on souhaiterait pouvoir exprimer les formes modulaires comme des spécialisations de fonctions vivant sur des espaces géométriques plus riches –c'est la notion de "famille" de formes modulaires vivant sur des algèbres de Hecke, (notion introduite par Hida en [**Hid86a, Hid86b**]) ; la méthode dite "de Taylor–Wiles", et ensuite perfectionnée par Kisin dans [**Kis09b**], permet alors d'aller "un cran plus loin" et suggère que les algèbres de Hecke proviennent elles-mêmes des espaces de déformation galoisiens *locaux*, avec des conditions provenant de la théorie de Fontaine.

Essayons de préciser un peu plus tout cela. Soit p un nombre premier, $\mathbb{F}$ une extension finie de $\mathbb{F}_p$ et désignons par $G_{\mathbb{Q}_p}$ le groupe de Galois absolu de $\mathbb{Q}_p$, i.e. le groupe des automorphismes continus de corps de $\overline{\mathbb{Q}}_p$ (continus pour la topologie p-adique). Désignons par $W(\mathbb{F})$ l'anneau des vecteurs de Witt de $\mathbb{F}$, et par E le corps des fractions de $W(\mathbb{F})$. Nous *fixons* un homomorphisme continu (pour la topologie profinie sur $G_{\mathbb{Q}_p}$, et discrète sur $\mathbb{F}$) $\overline{\rho} : G_{\mathbb{Q}_p} \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$. On voudrait disposer d'une manière "uniforme" pour étudier les *relèvements* de $\overline{\rho}$, i.e. les homomorphismes continus $\rho_A : G_{\mathbb{Q}_p} \to \mathrm{GL}_n(A)$, avec $(A, \mathfrak{m})$ une $W(\mathbb{F})$-algèbre artinienne locale et ρ_A vérifiant $\rho_A \equiv \overline{\rho}$ modulo $\mathfrak{m}$. Une manière féconde pour ce faire est de mettre ces relèvements en "famille", i.e. faire de telle sorte que la collection de ces relèvements soit paramétrée par des points d'un espace géométrique raisonnable, ou, dans un langage scientifique, de déterminer une $W(\mathbb{F})$-algèbre noetherienne locale complète $R^{\square}_{\overline{\rho}}$ et un homomorphisme continu $\rho : G_{\mathbb{Q}_p} \to \mathrm{GL}_n(R^{\square}_{\overline{\rho}})$ tels que, si $(A, \mathfrak{m})$ est une $W(\mathbb{F})$-algèbre

L'auteur est partiellement subventionné par l'Institut Universitaire de France et souhaite remercier P. Boyer, C. Breuil, A. Mézard, M. Tamiozzo pour plusieurs suggestions qui ont amélioré le texte de manière significative.

artinienne locale et ρ_A est un relèvement de $\overline{\rho}$, alors il existe un unique homomorphisme de $W(\mathbb{F})$-algèbres locales $f : R^{\square}_{\overline{\rho}} \to A$ tel que $f \circ \rho = \rho_A$.

Il se trouve qu'un telle algèbre existe, et, d'après l'œuvre de Fontaine, et de la compatibilité locale–globale "en $\ell = p$" pour le programme de Langlands arithmétique(1), les relèvements de $\overline{\rho}$ apparaissant dans les applications arithmétiques classiques possèdent de propriétés de "rigidité" remarquables. Dans la terminologie de la théorie de Fontaine, il s'agit de relèvements donnant des $W(\mathbb{F})$-réseaux dans des représentations galoisiennes *potentiellement semi-stables* à coefficients sur E. Ces représentations peuvent se classifier à travers la théorie des isocristaux avec structures supplémentaires : filtration de Hodge, monodromie, descente. La nécessité d'avoir des structures supplémentaires n'est pas surprenant : le lecteur peut penser à l'incarnation des formes modulaires en termes de systèmes locaux, provenant des représentations algébriques, sur une courbe modulaire (e.g. [**Del71, Car89**]), de telle sorte que les formes propres de poids $k \geq 2$ (sections propres pour l'action de Hecke du système local provenant de la représentation algébrique $\mathrm{Sym}^{k-2}\mathbb{C}^2$) produisent des représentations galoisiennes qui sont potentiellement semi-stables, à poids de Hodge–Tate $(k-1, 0)$.

Les travaux fondamentaux de Fontaine et Laffaille [**FL82**] puis C. Breuil et M. Kisin [**Bre98, Bre99, Kis06**] montrent que ces structures supplémentaires ont une signification *même à niveau entier*. En particulier [**Kis08**] montre que les *relèvements* de $\overline{\rho}$ satisfaisant aux contraintes de la théorie de Fontaine définissent des sous espaces *fermés*, réduits et plats sur $W(\mathbb{F})$ de Spec $(R_{\overline{\rho}})$ –des espaces sur lesquels on peut aborder des questions géométriques.

Les données discrètes des poids de Hodge–Tate, descente, monodromie, provenant de la théorie de Fontaine ont, *a posteriori* en s'inspirant du cas de formes modulaires, des interprétations naturelles en termes de théorie des représentations (localement algébriques) de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$. Dans un travail marquant [**BM02**], C. Breuil et A. Mézard ont conjecturé que ces interprétations en termes de théorie de représentations sont en fait *elles seules* suffisantes à prévoir la géométrie *entière* de ces espaces de déformation. En d'autres termes, Breuil et Mézard ont conjecturé que des invariants discrets définis uniquement par la géométrie (de la fibre spéciale) des espaces de déformation galoisiens sont déterminés (et déterminent uniquement) des invariants discrets provenant de la théorie des représentations localement algébriques de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ à coefficients dans $W(\mathbb{F})$. Même plus, cette détermination mutuelle est à considérer comme la résolution d'un système infini d'équations (les représentations localement algébriques de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ à coefficients dans $W(\mathbb{F})$) dans un nombre fini de variables (les représentations absolument irréductibles de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ à coefficients dans $\mathbb{F}$).

2. La conjecture de Breuil et Mézard et ses généralisations

Précisons ici la signification exacte de la conjecture Breuil–Mézard présentée en [**BM02**]. Soit $k > 2$ et soit τ un *type inertiel*, i.e. une représentation avec noyau ouvert $I_{\mathbb{Q}_p} \to \mathrm{GL}_2(E)$

(1)Dans le cas des formes modulaires classiques, cette compatibilité exprime les propriétés de la restriction à $G_{\mathbb{Q}_p} \subset G_{\mathbb{Q}}$ de la représentation galoisienne globale $\rho_f : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ associée à une forme modulaire f par la méthode de Deligne cf. [**Sai97**].

et qui s'étend à une représentation du groupe de Weyl de $\mathbb{Q}_p$. (Nous avons désigné par $I_{\mathbb{Q}_p}$ le sous groupe d'inértie de $G_{\mathbb{Q}_p}$, i.e. le noyau de l'application naturelle $G_{\mathbb{Q}_p} \twoheadrightarrow \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p)$.) D'une part on peut alors lui associer, par la correspondance de Langlands inertielle établie par G. Henniart en [**BM02**, Appendice], une représentation irréductible lisse $\sigma(\tau)$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ à coefficients sur E. D'autre part, la paire $(k-1,0)$ peut s'interpréter comme la représentation algébrique absolument irréductible de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ de plus haut poids(2) $(k-1,0)$, représentation que nous notons par $W_{(k-1,0)}$ dans la suite. Par conséquent, les poids de Hodge–Tate $(k-1,0)$ et la donnée de descente inertielle τ, apparaissant naturellement du côté de la théorie de Fontaine, ont une interprétation naturelle en termes de théorie des représentations via la représentation localement algébrique $W_{(k-1,0)} \otimes_E \sigma(\tau)$. Enfin, pour énoncer la conjecture, nous avons besoin d'un dernier acteur : les *poids de Serre*. Un poids de Serre est une représentation absolument irréductible de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ à coefficients sur $\mathbb{F}$. Leurs classes d'isomorphismes sont données par des paires $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ avec $0 \le a-b \le p-1$, $0 \le b \le p-2$, en particulier il n'y en a qu'un nombre fini. La partie poids de la conjecture de modularité de Serre [**Ser87**] peut alors se voir comme une procédure combinatoire qui associe à $\overline{\rho}|_{I_{\mathbb{Q}_p}}$ un ensemble $W(\overline{\rho})$ de poids de Serre.

La conjecture de Breuil–Mézard, demontrée en grande généralité par Kisin [**Kis09a**] (par des méthodes globales), Paskunas [**Paš15**] (par des méthodes locales), et dans les cas exceptionels restants via plusieurs travaux [**HT15, Tun21a, Tun21b, San16**], affirme que :

Conjecture 2.1. — *Soit $\overline{\rho} : G_{\mathbb{Q}_p} \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{F})$ continue et soit $W(\overline{\rho})$ l'ensemble de poids de Serre associé. Ils existent des entiers $n_{\sigma,\overline{\rho}} \in \mathbb{N}$, parametrés par l'ensemble des poids de Serre σ de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$, tels que, pour* tout $k \ge 2$ et tout type inertiel τ *on a l'égalité*

$$HS(R_{\overline{\rho}}^{(k-1,0),\tau} \otimes_{W(\mathbb{F})} \mathbb{F}) = \sum_{\sigma \in W(\overline{\rho})} [W_{(k-1,0)} \otimes_E \sigma(\tau) : \sigma] n_{\sigma,\overline{\rho}} \tag{1}$$

où :

- $R_{\overline{\rho}}^{(k-1,0),\tau}$ *désigne l'anneau de déformation de $\overline{\rho}$ parametrant les déformations à poids de Hodge–Tate $(k-1,0)$ et type inertiel τ (*[**Kis08**]*) ;*
- $HS(\bullet)$ *désigne la multiplicité de Hilbert–Samuel de la $\mathbb{F}$-algèbre locale $\bullet$;*
- $[W_{(k-1,0)} \otimes_E \sigma(\tau) : \sigma]$ *désigne la multiplicité de σ dans les facteurs de Jordan–Hölder de la "réduction modulo p de $W_{(k-1,0)} \otimes_E \sigma(\tau)$" (i.e. la multiplicité comme facteur de composition de la réduction modulo p d'un $W(\mathbb{F})$-réseau stable par l'action de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ *à l'intérieur de $W_{(k-1,0)} \otimes_E \sigma(\tau)$).*

Commençons par remarquer que cette conjecture exprime l'existence d'une solution (les "multiplicité modulaires" $[W_{(k-1,0)} \otimes_E \sigma(\tau)^\circ : \sigma]$) pour une *infinité* de systèmes d'équations (paramétrées par $k > 2$ et τ) en un nombre *fini* de variables (les $n_{\sigma,\overline{\rho}}$). Du coup, la formulation même d'une telle conjecture exprime l'existence d'un principe unificateur liant les congruences entre représentations galoisiennes (ou, en termes plus sophistiqués, paramètres de Langlands) avec les représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ à coefficients entiers. La profondeur de

(2) Rappelons que les représentations algébriques de GL_2 sont classifiées par leur *plus haut poids*, i.e. par un élément de $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ avec $a \ge b$.

cette conjecture repose aussi sur le fait qu'on travaille à niveau *entier*, ce qui suggère l'existence de structures géométriques cachées produisant ces systèmes d'équations : par exemple, la multiplicité de Hilbert–Samuel de $R_{\overline{\rho}}^{(k-1,0),\tau} \otimes_{W(\mathbb{F})} \mathbb{F}$ s'interprète géométriquement comme le nombre de composantes irréductibles avec multiplicité[(3)] de Spec $(R_{\overline{\rho}}^{(k-1,0),\tau} \otimes_{W(\mathbb{F})} \mathbb{F})$.

Le but du travail [**EG14, EG23**] est de développer cette vision géométrique de manière plus vaste, en remplaçant $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ par $\mathrm{GL}_n(K)$, $K/\mathbb{Q}_p$ extension finie (d'anneau d'entiers $\mathcal{O}_K$ et corps résiduel k), et en faisant intervenir des *espaces de modules* de représentations galoisiennes à coefficients de torsion. Ceux-ci sont des 2-foncteurs en groupoïdes

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{n,K} : W(\mathbb{F})\text{-Alg} &\longrightarrow (\Phi,\Gamma)\text{-Mod}^{\text{ét}}_{n,K} \\ A &\longmapsto (\Phi,\Gamma)\text{-Mod}^{\text{ét}}_{n,K}(A) \end{aligned}$$

où $(\Phi,\Gamma)\text{-Mod}^{\text{ét}}_{n,K}(A)$ désigne le groupoïde des (φ,Γ)-modules étale de rang n, i.e. des modules projectifs de rang n sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E},A} \overset{\text{def}}{=} \big((W(k)\otimes_{\mathbb{Z}_p} A)[\![v]\!][1/v]\big)^{\wedge_p}$, munis d'un endomorphisme Frobenius semi-linéaire[(4)] injectif, et d'une action semi-linéaire de $\Gamma \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Gal}(K_{\mathrm{cyc}}/K) \cong \mathbb{Z}_p$ (semi-linéaire par rapport à l'action naturelle de Γ sur $W(k)$), commutant entre elles. Ici, $\wedge_p$ désigne la complétion p-adique et K_{cyc} l'extension cyclotomique dans $K(\zeta_{p^\infty})$. D'après un résultat fondamental de Fontaine [**Fon90**], lorsque A est une $W(\mathbb{F})$-algèbre noetherienne locale, le groupoïde $(\Phi,\Gamma)\text{-Mod}^{\text{ét}}_{n,K}(A)$ est équivalent au groupoïde des représentations continues de G_K sur des A-modules projectifs de rang n, ce qui suggère que les champs $\mathcal{X}_{n,K}$ sont des bons objets pour donner un sens à l'idée de “faire varier $\overline{\rho}$ en familles”.

La géométrie des champs $\mathcal{X}_{n,K}$ demeure d'accès difficile. Une grande partie des travaux [**EG21, EG23**] consiste d'abord à établir les bases pour une théorie satisfaisante des champs algébriques induits par images “schématiques” (condition provenant de la nécessité de créer des champs qui peuvent ensuite avoir une signification raisonnable en termes de représentations galoisiennes), et à étudier les premières propriétés qualitatives des champs ainsi construits. On découvre alors en [**EG23**, Theorem 1.2.1] que $\mathcal{X}_{n,K}$ est un champ algébrique formel noethérien sur $\mathrm{Spf} W(\mathbb{F})$, équidimensionnel de dimension $\binom{n}{2}[K:\mathbb{Q}_p]$, dont les anneaux locaux aux $\mathbb{F}$-points de type fini[(5)] sont isomorphes à $R_{\overline{\rho}}^{\square}$ et dont les composantes (géométriquement) irréductibles de $\mathcal{X}_{n,K}$ (composantes définies en fait sur $\mathbb{F}$) sont paramétrées par les représentations (absolument) irréductibles de $\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_K)$ à coefficients sur $\mathbb{F}$ (i.e. les *poids de Serre pour* $\mathrm{GL}_n(k)$). De plus, on retrouve à l'intérieur de $\mathcal{X}_{n,K}$ des sous champs fermés $\mathcal{X}^{\lambda,\tau}$ qui paramètrent[(6)] les représentations potentiellement semi-stables avec poids de Hodge–Tate $\lambda \in (\mathbb{Z}^n_+)^{[K:\mathbb{Q}_p]}$ (où $\mathbb{Z}^n_+$ désigne l'ensemble des n-uplets $(\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_n) \in \mathbb{Z}^n$, $\nu_1 \geq \nu_2 \geq \dots \geq \nu_n$) et type $\tau : I_K \to \mathrm{GL}_n(E)$; comme précédemment, les anneaux locaux aux points fermés de type fini sont isomorphes à $R_{\overline{\rho}}^{\lambda,\tau}$.

---

(3) Des multiplicité qui tiennent compte des singularités éventuelles des composantes.

(4) I.e. semi-linéaire par rapport à un relèvement à $\mathcal{O}_{\mathcal{E},A}$ du morphisme $\mathbb{F}$-linéaire $(x\otimes 1)v \mapsto (x^p\otimes 1)v^p$ défini sur $(k\otimes_{\mathbb{F}_p}\mathbb{F})(\!(v)\!)$.

(5) Points qui correspondent, d'après l'équivalence de Fontaine, aux représentations continues de G_K de dimension n sur $\mathbb{F}$.

(6) Sur les $W(\mathbb{F})$-algèbres noetheriennes p-adiquement complètes.

Étant donné ce contexte, la conjecture Breuil–Mézard peut se reformuler et se préciser comme une égalité entre cycles de dimension maximale de la fibre spéciale réduite $(\mathcal{X}_{n,K}\times_{W(\mathbb{F})}\mathbb{F})_{\mathrm{red}}$ de $\mathcal{X}_{n,K}$: il existe des cycles $\mathcal{Z}(\sigma)\in Z_{\binom{n}{2}[K:\mathbb{Q}_p]}((\mathcal{X}_{n,K}\times_{W(\mathbb{F})}\mathbb{F})_{\mathrm{red}})$, paramétrés par les poids de Serre σ de $\mathrm{GL}_n(k)$, tels que *pour tout* poids de Hodge–Tate $\lambda\in(\mathbb{Z}^n_+)^{[K:\mathbb{Q}_p]}$ et *tout* type inertiel τ on a une égalité

$$[\mathcal{X}^{\lambda,\tau}\otimes_{W(\mathbb{F})}\mathbb{F}]=\sum_{\sigma}[W_\lambda\otimes\sigma(\tau):\sigma]\mathcal{Z}(\sigma) \tag{2}$$

où $[\bullet]$ désigne le cycle associé à un sous-espace fermé $\bullet\hookrightarrow(\mathcal{X}_{n,K}\otimes_{W(\mathbb{F})}\mathbb{F})_{\mathrm{red}}$, W_λ la représentation algébrique (à coefficients sur $W(\mathbb{F})$) de plus haut poids λ et $\sigma(\tau)$ une représentation irréductible de $\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_K)$ associée à τ comme en [**LLHLM23**, Theorem 2.5.4] (correspondance de Langlands "intertielle", cf. [**Sho18, Pyv20**]). Ainsi l'égalité (2) donne, par spécialisation aux anneaux locaux, et en prenant les multiplicités de Hilbert–Samuel, la conjecture originale de Breuil–Mézard (1). Remarquons ici que les cycles algébriques $\mathcal{Z}(\sigma)$ sont en général différents des composantes irréductibles de $\mathcal{X}_{n,K}$ (sauf pour des poids réguliers et en dimension ≤ 3, cf. [**LLHLMb**]), et leur expression en termes de ces derniers reste difficile mais algorithmiquement accessible.

Comme la discussion ci-dessus le laisse entrevoir, la conjecture Breuil–Mézard est la porte d'entrée vers un monde encore plus vaste, qui est censé relier la catégorie de faisceaux sur des "espaces de paramètres de Langlands" (e.g. les sous-espaces fermés $\mathcal{X}^{\lambda,\tau}\hookrightarrow\mathcal{X}_{n,K}$) à une catégorie convenable de représentations de $\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_K)$ à coefficients sur $W(\mathbb{F})$, de telle sorte que les égalités ci-dessus sont obtenues par passage au groupe de cycles des composantes de dimension maximale et au groupe de Grothendieck des objets irréductibles, respectivement(7).

La discussion ci-dessus montre l'importance de l'étude des propriétés géométriques *fines* des espaces $\mathcal{X}^{\lambda,\tau}$. Néanmoins, une telle tâche se révèle ardue, à cause de la définition des $\mathcal{X}_{n,K}$ en termes d'images schématiques, de leur nature *ind*-algébrique, des conditions de *semi*-linéarité dans leur description sur les points, et à cause des subtilités de la théorie de Fontaine entière (liées de manière étroite à la nécessité de prendre des images schématiques). À l'heure actuelle, une telle étude a été achevée dans peu de cas ($n\leq 3$, $K/\mathbb{Q}_p$ non ramifié, τ modéré avec des conditions de régularité précises), cf. [**LLHLMb, LHMM**]), en développant les techniques provenant du modèle local de représentations galoisiennes développé dans [**LLHLM23**] (et inspiré par les travaux de [**PR09, CL18**]).

3. Le modèle local

Le travail [**LLHLM23**] est la première tentative pour aborder d'une manière systématique l'étude des propriétés géométriques fines des champs $\mathcal{X}^{\lambda,\tau}$. Le point de départ sont les *modèles locaux* de [**PR09**], qui ensuite permettent, à travers une "condition de monodromie" très délicate, de tisser un lien inattendu entre représentations galoisiennes et théorie géométrique des représentations. Ce point de vue est largement inspiré par le travail précurseur et novateur [**BHS19**], qui développe une théorie similaire de modèles locaux des représentations

(7) Ce point de vue, fascinant, est développé dans [**FLH**], qui donne un véritable changement de paradigme dans l'intérprétation géométrique de la conjecture Breuil–Mézard.

Galoisienne, et leur lien avec la théorie géométrique des représentations. Le résultat principal de [**LLHLM23**] est le suivant :

Theorem 3.1. — *Il existe un ensemble fini $\mathcal{A}$ et des recouvrements ouverts de Zariski $\bigcup_{\widetilde{z}\in\mathcal{A}}\mathcal{X}^{\eta,\tau}(\widetilde{z})$ de $\mathcal{X}^{\eta,\tau}$ et $\bigcup_{\widetilde{z}\in\mathcal{A}}U(\widetilde{z},\eta,\nabla_{\tau,\mathrm{alg}})^{\wedge p}$ de $M(\leq\eta,\nabla_{\tau,\mathrm{alg}})^{\wedge p}$ tels que, pour tout $\widetilde{z}\in\mathcal{A}$ on a un diagramme*

$$\begin{tikzcd} & \widetilde{\mathcal{X}}^{\eta,\tau}(\widetilde{z}) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \mathcal{X}^{\eta,\tau}(\widetilde{z}) & & U(\widetilde{z},\eta,\nabla_{\tau})^{\wedge p} \end{tikzcd} \tag{3}$$

où les flèches sont des torseurs pour l'action de $T(\mathbb{F})$ (pour des actions différentes à gauche et à droite).

Pour donner l'idée de la portée du Théorème 3.1[(8)] il nous faut préciser les objets intervenant dans son énoncé, ce que nous ferons dans la suite.

3.1. Construction du modèle local : contexte général classique. — Le point de départ est la caractérisation des $W(\mathbb{F})$-réseaux dans les représentations potentiellement cristallines de type (η,τ). D'après [**LLHLM23**, §5.1] ces réseaux peuvent être approximés par des $(W(k)\otimes_{\mathbb{Z}_p}W(\mathbb{F}))[\![v]\!]$-modules projectifs $\mathfrak{M}$ de rang n, munis d'une application Frobenius semi-linéaire $\varphi_{\mathfrak{M}}$ dont le conoyau est borné par η[(9)]. Désignons par $Y^{\eta,\tau}(W(\mathbb{F}))$ le groupoïde de ces modules[(10)] de hauteur bornée par η et donnée de descente τ, et définis sur $W(\mathbb{F})$.

La présence de l'application $\varphi_{\mathfrak{M}}$ permet maintenant de tisser un lien avec des objets plus familiers en théorie des représentations. En effet, on peut trouver des bases β sur $\mathfrak{M}$ qui sont équivariantes par rapport à l'action de τ, et la matrice $A_{\mathfrak{M},\beta}$ de $\phi_{\mathfrak{M}}$ par rapport à cette base[(11)] nous permet d'identifier le "point" $\mathfrak{M}\in Y^{\eta,\tau}(W(\mathbb{F}))$ avec un point d'un espace de classes d'équivalence de matrices, notamment le modèle local $M(\leq\eta)$ de Pappas–Rapoport [**PR08**][(12)]. Cette identification n'est pas immédiate car la classe d'isomorphisme d'un $\mathfrak{M}\in Y^{\eta,\tau}$ est donnée par conjugaison *Frobenius semi-linéaire* et donc pour utiliser la théorie des modèles locaux il faudrait "re-dresser" cette conjugaison sémilinéaire en une multiplication

(8) Qui reste valable pour des extensions finie non ramifiées de $\mathbb{Q}_p$ et en remplaçant η par n'importe quel poids de Hodge–Tate λ, au prix d'augmenter les contraintes sur τ.

(9) Notons le rôle apparemment absent de τ : ceci intervient dans la définition de l'action de $T(W(\mathbb{F}))^{[K:\mathbb{Q}_p]}$ sur $\widetilde{\mathcal{X}}^{\eta,\tau}(\widetilde{z})$.

(10) Parfois appelés "modules de Breuil–Kisin".

(11) Plus précisément, la matrice de la *restriction* de $\phi_{\mathfrak{M}}$ *à une composante isotypique* pour l'action de descente de type τ.

(12) Rappelons la construction de $M(\leq\eta)$: si $\widetilde{\mathrm{Gr}}$ designe la Grasmannienne affine sur $W(\mathbb{F})$, ind-schéma obtenu par faisceautisation du foncteur (sur les $W(\mathbb{F})$-algèbres noetheriennes) $R\mapsto L^+\mathcal{G}\backslash L\mathcal{G}$ où $L\mathcal{G}(R)$ (resp. $L^+\mathcal{G}$) désigne l'espace des matrices $A\in\mathrm{GL}_n(R((v+p)))$ (resp. $A\in\mathrm{GL}_n(R[[v+p]])$) qui sont triangulaires supérieures modulo v (resp. unipotentes supérieures modulo v) alors $M(\leq\eta)$ est le $W(\mathbb{F})$-*schéma affine* obtenu par clôture de Zariski dans $\mathrm{Gr}\overset{\mathrm{def}}{=}[T(W(\mathbb{F}))\backslash\widetilde{\mathrm{Gr}}]$ de la cellule de Schubert associés à η dans $\mathrm{Gr}[1/p]$, ce dernière étant la Grassmannienne usuelle sur $\mathbb{Q}_p$.

à gauche des matrices, ce qui est possible en caractéristique p voir [**LLHLM23**, Corollary 5.2.3][13].

3.2. Construction du recouvrement ouvert, première étape.— Passons maintenant à la construction du recouvrement ouvert mentionné au Théorème 3.1.

Soit $\widetilde{W}$ le groupe de Weyl affine de GL_n. Ses éléments s'identifient aux matrices de la forme $\sigma \cdot \mathrm{Diag}(v^{\nu_1}, \ldots, v^{\nu_n})$, où σ est une matrice de permutation de taille n et $(\nu_1, \ldots, \nu_n) \in \mathbb{Z}^n$, et une analyse des espaces tangents de $\widetilde{\mathrm{Gr}}$ ([**LLHLM23**, Corollary 3.2.10]) montre que les espaces des matrices $A \in L\mathcal{G}$ à coefficients polynomiaux à "degrées bornés par $\widetilde{z} \in \widetilde{W}$" forment un ouvert de Zariski $\widetilde{U}(\widetilde{z})$ dans $\widetilde{\mathrm{Gr}}$. D'après la conclusion du §3.1 on peut donc produire des ouverts de Zariski $Y^{\eta,\tau}(\widetilde{z})_{\mathbb{F}}$ de $Y^{\eta,\tau}_{\mathbb{F}}$ et, par complétion formelle, des ouverts de Zariski de $Y^{\eta,\tau}(W(\mathbb{F}))$. Il s'agit maintenant de relever en caractéristique mixte la description de $Y^{\eta,\tau}(\widetilde{z})_{\mathbb{F}}$, ce qui est possible car on peut montrer qu'ils existent, localement pour la topologie de Zariski, des bases isotypiques β pour $\mathfrak{M}$ telles que $A_{\mathfrak{M},\beta}$ ait des "dégrées bornées par $\widetilde{z}$" (i.e. $A_{\mathfrak{M},\beta} \in \widetilde{U}(\widetilde{z})(W(\mathbb{F}))$, voir [**LLHLM23**, Prop 5.2.7]). On arrive finalement au diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & {[\widetilde{U}(\widetilde{z}, \leq \eta)^{\wedge_p}]} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
Y^{\eta,\tau} & & M(\leq \eta)^{\wedge_p}
\end{tikzcd} \tag{4}$$

([**LLHLM23**, Thm 5.3.3]) où les flèches diagonales sont des immersions ouvertes précédées pas des T-torseurs[14], et $\widetilde{U}(\widetilde{z}, \leq \eta)(W(\mathbb{F}))$ est un $W(\mathbb{F})$-schémas affine noetherien dont les coordonnées sont données par des espaces de matrices à coefficients polynomiaux à degrés bornés par $\widetilde{z}$ et satisfaisant une condition explicite et simple provenant des diviseurs élémentaires bornés par η[15].

3.3. Construction du recouvrement ouvert, deuxième étape : la monodromie. — Les $Y^{\eta,\tau}$ ne donnent qu'une approximation de $\mathcal{X}^{\eta,\tau}$: en effet, en utilisant l'anti-équivalence de Fontaine entre φ-modules étales et représentations de $G_{\mathbb{Q}_{p_\infty}}$ ($\mathbb{Q}_{p_\infty} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathbb{Q}_p((-p)^{1/p^\infty})$), $\mathfrak{M}$ ne correspond qu'à un $W(\mathbb{F})$-réseau dans une représentation de $G_{\mathbb{Q}_{p_\infty}}$, et il n'y a aucune raison à ce que l'action puisse s'étendre à $G_{\mathbb{Q}_p}$, encore moins à une action cristalline (et moins encore en gardant les structures entières sur $W(\mathbb{F})$).

[13] Ceci montre que $Y^{\eta,\tau}(\mathbb{F})$ est isomorphe à un $T(\mathbb{F})$-torseur par une action, "tordue" par Frobenius et τ, sur $\widetilde{\mathrm{Gr}}(\mathbb{F})$.

[14] Pour la flèche de gauche, l'ensemble des bases de gauge est un $T(W(\mathbb{F}))$-torseur pour l'action tordue par Frobenius et τ de T d'après [**LLHLM23**, Prop 5.2.7], et, pour la flèche de droite, nous avons un torseur naturel $\widetilde{\mathrm{Gr}} \to \mathrm{Gr}$ donné par l'action par translation à gauche du tore, qui permet d'obtenir des ouverts $U(\widetilde{z}, \leq \eta)$ de $M(\leq \eta)$.

[15] De telle sorte que $\widetilde{U}(\widetilde{z}, \leq \eta) \neq \emptyset$ si et seulement si $\widetilde{z}$ est "borné par η", voir [**LLHLM23**, Corollary 5.3.4] : c'est ici qu'on voit que l'ensemble d'indices $\mathcal{A}$ est constitué par les éléments dits η-admissibles de $\widetilde{W}$, donc en particulier un ensemble fini.

Kisin a trouvé une solution à ce problème [**Kis06**], en considérant une condition supplémentaire sur $\mathfrak{M}$ qui n'existe qu'au niveau rigide analytique, notamment la *condition de monodromie* ([**LLHLM23**, Definition 7.1.2]). Cette condition peut se traduire en termes de matrices, donc en termes (de la complétion p-adique) de $\widetilde{\mathrm{Gr}}$, en donnant ainsi des sous-espaces formels fermés $\widetilde{U}(\widetilde{z}, \leq \eta, \nabla_{\tau,\infty}) \hookrightarrow \widetilde{U}(\widetilde{z}, \leq \eta)^{\wedge p} \hookrightarrow \widetilde{U}(\widetilde{z}, \leq \eta)$. Comme de plus l'application naturelle[16] $Y^{\eta,\tau} \to \left\{\varphi\text{-modules étale de rang } n \text{ sur } \mathcal{O}_{\mathcal{E},\mathbb{Q}_p}\right\}$ est injective ([**LLHLM23**, Proposition 5.4.3]), on obtient par (4) des ouverts de Zariski $\mathcal{X}^{\eta,\tau}(\widetilde{z})$ ainsi que des T-torseurs $\widetilde{U}(\widetilde{z}, \leq \eta, \nabla_{\tau,\infty}) \to \mathcal{X}^{\eta,\tau}(\widetilde{z})$ ([**LLHLM23**, Proposition 7.2.3, Proposition 7.3.2]).

Sous des conditions de régularité simples sur τ, un calcul explicite ([**LLHLM23**, Prop 7.1.10]) et une version géométrique du Lemme de Hensel (le lemme d'approximation d'Elkik[17] [**Elk73**, Lemme 1]) donnent des immersions fermées non-canoniques $\widetilde{U}(\widetilde{z}, \leq \eta, \nabla_{\tau,\infty}) \hookrightarrow \widetilde{U}(\widetilde{z}, \leq \eta, \nabla_{\tau,\mathrm{alg}})^{\wedge p}$. De plus l'algébricité de la condition précédente donne une immersion fermée de schémas $M(\leq \eta, \nabla_{\tau,\mathrm{alg}}) \hookrightarrow M(\leq \eta)$ et induit une immersion ouverte $U(\widetilde{z}, \leq \eta, \nabla_{\tau,\mathrm{alg}}) \hookrightarrow M(\leq \eta, \nabla_{\tau,\mathrm{alg}})$ qui nous donne finalement le recouvrement de Zariski de $M(\eta, \nabla_{\tau,\mathrm{alg}})$ apparaissant dans le théorème 3.1.

Notons que, jusqu'à ce point, on a seulement une immersion fermée $\mathcal{X}^{\eta,\tau}(\widetilde{z}) \hookrightarrow \widetilde{U}(\widetilde{z}, \leq \eta, \nabla_{\tau,\mathrm{alg}})^{\wedge p}$. C'est ici que la propriété fondamentale de $\widetilde{U}(\widetilde{z}, \leq \eta, \nabla_{\tau,\mathrm{alg}})$ d'être unibranche au $\mathbb{F}$-point correspondant à $\widetilde{z}$ rentre dans le jeu : cette propriété assure que la complétion du schéma affine irréductible $\widetilde{U}(\widetilde{z}, \leq \eta, \nabla_{\tau,\mathrm{alg}})$ en $\widetilde{z}$ reste irréductible, et donc que $\widetilde{U}(\widetilde{z}, \leq \eta, \nabla_{\tau,\mathrm{alg}})^{\wedge p}$ est lui-même irréductible.

La preuve de la propriété unibranche, cœur technique de [**LLHLM23**], repose sur l'existence d'un modèle local "universel" défini sur $\mathbb{Z}[t]$. Ce modèle universel est muni d'une action supplémentaire d'un $\mathbb{G}_m$ par homothétie sur le paramètre t, qui fait[18] que ce modèle est lui-même unibranche en $\widetilde{z}$ ([**LLHLM23**, Proposition 3.4.4]). On peut maintenant effectuer un "changement de base $t \mapsto p$" pour passer à $\widetilde{U}(\widetilde{z}, \leq \eta, \nabla_{\tau,\mathrm{alg}})$, mais ceci n'est pas sans douleur : la propriété unibranche est préservée par changement de base seulement *localement sur la topologie Zariski*, ce qui nous oblige à imposer des conditions sur la régularité de τ liées à la géométrie du modèle universel.

[16] Localisation en $v \neq 0$ suivie de l'équivalence de Fontaine.

[17] La vérification des conditions de lissité requises par l'utilisation du lemme d'Elkik ne sont pas évidentes et reposent sur une analyse détaillée de la condition de monodromie sur l'espace tangent de $\widetilde{U}(\widetilde{z}, \leq \eta, \nabla_{\tau,\mathrm{alg}})$ ([**LLHLM23**, Proposition 3.3.8]), qui montre qu'on peut "résoudre" par récurrence les coefficients non maximaux des polynômes apparaissant dans les matrices A.

[18] L'action de $\mathbb{G}_m$, conjointement à l'action usuelle de T, est contractante sur les ouverts affines irréductibles universels $\widetilde{U}^{\mathrm{univ}}(\widetilde{z})$, avec unique point fixe, notamment $\widetilde{z}$, [**LLHLM23**, Lemma 3.4.7].

4. Applications aux conjectures de Breuil–Mézard et de Serre

Nous discutons maintenant[19] comment le Théorème 3.1 permet d'obtenir (par voie globale) la conjecture de Breuil–Mézard et la partie poids des conjectures de Serre, qui associe à une $\overline{\rho}$ semi-simple un ensemble $W^?(\overline{\rho})$ de poids de Serre pour $\overline{\rho}$ [**Her09**, Conjecture 6.9].

4.1. La preuve de la conjecture de Breuil–Mézard géométrique. — Les idées principales pour la preuve de la conjecture Breuil–Mézard peuvent se résumer en les points suivants :

1. l'utilisation des propriétés du foncteur dit "de patching" associé aux représentations galoisiennes semi-simples génériques : son exactitude et le fait qu'il est Cohen–Macaulay maximal sur son support, donc "presque" un module libre sur son support ;
2. le fait que, dans le groupe de Grothendieck des représentations de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$, on peut exprimer les poids de Serre génériques en termes de types génériques, *modulo des poids de Serre parasites* qui *sont invisibles aux foncteurs de patching* des représentations galoisiennes semi-simples génériques ([**LLHLM23**, Lemme 8.3.7])
3. la version géométrique "faible" de la partie poids de la conjecture de Serre[20] donnée en [**LLHLM23**, Proposition 7.4.7(1)]. Elle affirme que sous des conditions de généricité convenables et effectives, si $\sigma \in W^?(\overline{\rho})$ est ordinaire et générique, alors $\overline{\rho}$ est un $\mathbb{F}$-point de la composante irréductible de $\mathcal{X}_{n,\mathbb{Q}_p}$ paramétré par le poids de Serre σ, composante que nous désignons par $\mathcal{C}_\sigma$ dans ce qui suit.

Le point 2 repose d'un côté sur une analyse de la relation étroite entre la généricité d'une représentation de Deligne–Lusztig et ses constituants de Jordan–Hölder résiduels ([**LLHLM23**, Lemme 2.3.4]), et, de l'autre, d'un résultat dit "élimination de poids"[21] pour les représentations galoisiennes semi-simples et suffisamment génériques ([**LHL19**, Corollary 4.1.12], [**LLHLM23**, Lemma 7.3.5]). Les poids de Serre parasites sont alors, par construction, des poids de Serre apparaissant dans des types qui ne sont pas génériques, et donc qui ne sont pas dans l'ensemble $W^?(\overline{\rho})$ lorsque $\overline{\rho}$ est suffisamment générique ([**LLHLM23**, Lemme 8.4.4]).

Le point 3 repose aussi sur un problème combinatoire subtil : étant donné $\mathcal{C}_\sigma$, il faut déterminer un type générique τ ne contenant pas σ comme facteur de composition, et, ensuite, construire (par des méthodes combinatoires sur le groupe de Weyl affine cf. [**LLHLM23**, §2.3]) une représentation galoisienne semi-simple générique $\overline{\rho}$ telle que σ soit un poids

[19] Encore une fois, nous nous restreignons au cas où $K = \mathbb{Q}_p$ et $\lambda = \eta$, mais les résultats restent valables (avec des conditions de généricité un peu plus restrictives) pour $K/\mathbb{Q}_p$ non ramifiée et $\lambda \geq \eta$.

[20] La version "forte" du point (3) est utilisée dans la preuve de la partie poids de la conjecture de Serre, et nécessite, encore une fois, le transfert de la propriété unibranche du modèle local universel aux composantes $\mathcal{C}_\sigma$.

[21] Ce résultat repose sur une traduction uniforme des poids de Serre, des constituants de représentations de Deligne–Lusztig et des ensembles $W^?(\overline{\rho})$ en termes du groupe de Weyl affine (cf. [**LLHLM23**, Propositions 2.3.7 et 2.6.2]), ce qui permet de contrôler efficacement l'ensemble $\mathrm{JH}(\tau)$, constituants de Jordan–Hölder résiduels de $\sigma(\tau)$, et les ensembles $W^?(\overline{\rho})$.

"extrémal" pour $\overline{\rho}$[22]. Il faut alors déterminer l'ensemble des points de $\mathcal{C}_\sigma$ fixés par $T_{\mathbb{F}}$, parmi lesquels il y en a de particulièrement simples (i.e. donnés par des permutations, cf. [**LLHLM23**, Proposition 4.7.2]) et utiliser leur interprétation[23] en termes de poids triviaux.

4.2. La preuve de la partie poids de la conjecture de Serre. — La preuve de la partie poids de la conjecture de Serre pour les représentations semi-simples ([**LLHLM23**, Théorème 9.1.6]) demande des renseignements encore plus subtils sur la géométrie du modèle local, notamment un comptage des points de $\mathcal{C}_\sigma$ qui sont fixés par $T_{\mathbb{F}}$[24] et le fait qu'il y a suffisamment de types modérés pour lesquels les anneaux de déformation de $\overline{\rho}$ sont des domaines intègres[25].

Voyons plus en détail comment les deux points évoqués ci-dessus interviennent dans la preuve de la partie poids de la conjecture de Serre. D'abord, pour les résultats d'"élimination de poids" mentionnés ci-dessus, il suffit de montrer que si $\sigma \in W^?(\overline{\rho})$ alors $M_\infty(\sigma) \neq 0$. Pour ce faire, on utilise un procédé de récurrence sur le "défaut" des éléments de $W^?(\overline{\rho})$ (notion liée à l'ordre "$\uparrow$" des alcôves de l'appartement de GL_n). En effet, d'après [**LLHLM23**, Proposition 8.6.3] étant donné $\sigma \in W^?(\overline{\rho})$, on peut toujours trouver (sous des conditions de généricité simples) un type modéré τ tel que $\sigma \in \mathrm{JH}(\tau) \cap W^?(\overline{\rho})$ est l'unique élément de défaut maximal (nous avons désigné par $\mathrm{JH}(\tau)$ l'ensemble des constituants de Jordan–Hölder résiduels de $\sigma(\tau)$). La généricité forte de $\overline{\rho}$ permet alors d'utiliser la propriété unibranche des points semi-simples du modèle local, pour s'assurer que $R_{\overline{\rho}}^{\eta,\tau}$ est non nul et intègre. Donc, comme $M_\infty(\sigma(\tau)^\circ)$ est Cohen–Macaulay maximal, on conclut que $M_\infty(\tau)$ est à support sur $(\mathcal{C}_\sigma) \cap \mathrm{Spec}\ R_{\overline{\rho}}^{\eta,\tau}$, et donc que $M_\infty(\sigma')$ est à support sur $(\mathcal{C}_\sigma) \cap \mathrm{Spec}\ R_{\overline{\rho}}^{\eta,\tau}$ pour un σ' dans $\mathrm{JH}(\tau) \cap W^?(\overline{\rho})$. Le comptage de points fixes de $\mathcal{C}_\kappa$ lorsque κ est un poids de Serre générique permet de décrire l'ensemble $W^?(\overline{\rho})$ en termes d'idéaux annulateurs via la fibre spéciale du modèle local. On arrive donc à montrer ([**LLHLM23**, Proposition 8.6.3]) que $\mathrm{Ann} M_\infty(\sigma') \subset \mathfrak{P}_\sigma$ implique que le défaut de σ' est plus grand ou égal à celui de σ, et donc $\sigma = \sigma'$, comme l'on souhaitait.

Concluons ce survol sur la preuve du comptage des points fixes de $\mathcal{C}_\kappa$ pour κ générique, donc sur la preuve de [**LLHLM23**, Theorem 4.7.6].

Le point de départ est l'observation que les représentations semi-simples $\overline{\rho} : G_{\mathbb{Q}_p} \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ apparaissant dans $\mathcal{X}^{\eta,\tau}(\mathbb{F})$ correspondent aux $\mathbb{F}$-points de $M(\eta, \nabla_{\tau,\mathrm{alg}})$ qui sont fixés par l'action naturelle de $T_{\mathbb{F}}$[26] et que l'ensemble $W^?(\overline{\rho})$ s'exprime comme l'ensemble des σ tels que $\overline{\rho} \in \mathcal{C}_\sigma$. Le phénomène clé est que la description, en termes de $\widetilde{W}$, de l'ensemble

[22] La notion de poids extrémal pour $\overline{\rho}$ est une vaste généralisation de la notion, plus classique, des poids compagnon pour les formes modulaires, cf. [**LLHLMa**].

[23] Encore une fois, cela est effectué par une analyse de $\mathrm{JH}(\tau) \cap W^?(\overline{\rho})$ rendue gérable par la traduction de cet ensemble en termes du groupe de Weyl affine.

[24] [**LLHLM23**, Proposition 4.7.3], qui permet ensuite d'obtenir une version géométrique de la conjecture de Serre pour les représentations semi-simples, [**LLHLM23**, Theorem 4.7.6, Lemme 9.1.9].

[25] Cf. la propriété "unibranche" des points $\widetilde{z} \in \mathcal{A}$ des modèles locales pour $\mathcal{X}^{\eta,\tau}$.

[26] Ce qui revient à imposer la condition que la matrice du Frobenius du φ-module étale associée à $\overline{\rho}$ est un élément de $\widetilde{W}(\mathbb{F}((v)))$.

des points fixes des composantes irréductibles des fibres de Springer affines ([**LLHLM23**, Proposition 4.7.3]), et de l'ensemble $W^?(\overline{\rho})$ ([**LLHLM23**, Proposition 2.6.2]) en termes de variétés de Schubert sont en harmonie surprenante[(27)]. L'observation à la base de la preuve de [**LLHLM23**, Proposition 4.7.3] est, encore une fois, de travailler au niveau du modèle universel sur $\mathbb{Z}[t]$: d'une part la composante irréductible $\mathcal{C}_\sigma$ est alors obtenue, par changement de base via $\mathbb{A}^n_{\mathbb{Z}} \to \mathbb{A}^n_{\mathbb{F}_p}$, à partir d'une variété de Schubert "avec monodromie universelle" du modèle universel, et d'autre part, on peut déformer la monodromie en une direction "transverse" au changement de base ci-dessus pour retrouver une fibre Springer affine, dont les points fixes des composantes irréductibles ont été étudiés dans [**BA**] en termes de $\widetilde{W}$. Ainsi, grâce au résultat d'Alvarez, on sait que la variété de Schubert universelle avec monodromie est nécessairement non vide[(28)], et on peut transférer ce résultat par changement de base au niveau de la fibre spéciale du modèle local.

Le modèle local des représentations galoisiennes, développé dans [**LLHLM23**] a donné une nouvelle perspective au programme de Langlands modulo p, en rendant plus transparent le lien entre théorie des représentations et théorie des déformation galoisiennes. Ce point de vue a été poursuivi davantage dans [**FLH**], et nous sommes intimement convaincus que le potentiel de développement de toutes ces idées géométriques est encore largement inexploré[(29)].

Références

[BA] Pablo Boixeda Alvarez. Fixed points and components of equivalued affine Springer fibers. `https://arxiv.org/abs/1910.04780`. preprint (2019).

[BCDT01] Chriastophe Breuil, Brian Conrad, Fred Diamond, and Richard Taylor. On the modularity of elliptic curves over $\mathbf{Q}$: wild 3-adic exercises. *J. Amer. Math. Soc.*, 14(4) :843–939 (electronic), 2001.

[BHS19] Christophe Breuil, Eugen Hellmann, and Benjamin Schraen. A local model for the trianguline variety and applications. *Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci.*, 130 :299–412, 2019.

[BM02] Christophe Breuil and Ariane Mézard. Multiplicités modulaires et représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$ et de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ en $l = p$. *Duke Math. J.*, 115(2) :205–310, 2002. With an appendix by Guy Henniart.

(27) Cette idée de relier la partie poids des conjecture de Serre et les conjectures Breuil–Mézard en terme de géométrie de fibres de Springer a été très récemment mise à jour dans [**FLH**], qui donne une nouvelle perspective, encore une fois inspirée par le côté localement analytique de [**BHS19**], au programme de Langlands local modulo p.

(28) En fait sa fibre devient dense dans une composante irréductible de la fibre de Springer.

(29) J'espère que le modèle local puisse être nonce de découvertes dans le futur proche et que les nouvelles générations de mathématiciens pourrons faire de ces avancées une nouvelle étoile du nord pour naviguer avec plus de confiance sur les océans du programme de Langlands arithmétique, et que les lumières de l'intellect vaincront la mer âpre de l'oubli pour dissiper davantage sa *terra incognita*, ennemie ultime de la raison humaine.

[Bre98] Christophe Breuil. Construction de représentations p-adiques semi-stables. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 31(3) :281–327, 1998.

[Bre99] Christophe Breuil. Représentations semi-stables et modules fortement divisibles. *Invent. Math.*, 136(1) :89–122, 1999.

[Car89] Henry Carayol. Sur les représentations galoisiennes modulo l attachées aux formes modulaires. *Duke Math. J.*, 59(3) :785–801, 1989.

[CL18] Ana Caraiani and Brandon Levin. Kisin modules with descent data and parahoric local models. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 51(1) :181–213, 2018.

[Del71] Pierre Deligne. Modular forms and ℓ-adic representations. Sémin. Bourbaki 1968/69, No. 355, Lect. Notes Math. 179, 139-172 (1971)., 1971.

[EG14] Matthew Emerton and Toby Gee. A geometric perspective on the Breuil-Mézard conjecture. *J. Inst. Math. Jussieu*, 13(1) :183–223, 2014.

[EG21] Matthew Emerton and Toby Gee. "Scheme-theoretic images" of morphisms of stacks. *Algebr. Geom.*, 8(1) :1–132, 2021.

[EG23] Matthew Emerton and Toby Gee. *Moduli stacks of étale* (Φ, Γ)*-modules and the existence of crystalline lifts*, volume 215 of *Ann. Math. Stud.* Princeton, NJ : Princeton University Press, 2023.

[Elk73] Renée Elkik. Solutions d'équations à coefficients dans un anneau hensélien. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 6 :553–603, 1973.

[FL82] Jean-Marc Fontaine and Guy Laffaille. Construction de représentations p-adiques. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 15(4) :547–608 (1983), 1982.

[FLH] Tony Feng and Bao V. Le Hung. Mirror symmetry and the Breuil-Mézard conjecture ,. `https://arxiv.org/pdf/2310.07006.pdf`. preprint (2023).

[FM95] Jean-Marc Fontaine and Barry Mazur. Geometric Galois representations. In *Elliptic curves, modular forms, & Fermat's last theorem (Hong Kong, 1993)*, Ser. Number Theory, I, pages 41–78. Int. Press, Cambridge, MA, 1995.

[Fon90] Jean-Marc Fontaine. Représentations p-adiques des corps locaux. II. In *The Grothendieck Festschrift, Vol. II*, volume 87 of *Progr. Math.*, pages 249–309. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990.

[Her09] Florian Herzig. The weight in a Serre-type conjecture for tame n-dimensional Galois representations. *Duke Math. J.*, 149(1) :37–116, 2009.

[Hid86a] Haruzo Hida. Galois representations into $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p[[X]])$ attached to ordinary cusp forms. *Invent. Math.*, 85 :545–613, 1986.

[Hid86b] Haruzo Hida. Iwasawa modules attached to congruences of cusp forms. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 19(2) :231–273, 1986.

[HT94] Haruzo Hida and Jacques Tilouine. On the anticyclotomic main conjecture for CM fields. *Invent. Math.*, 117(1) :89–147, 1994.

[HT15] Yongquan Hu and Fucheng Tan. The Breuil-Mézard conjecture for non-scalar split residual representations. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 48(6) :1383–1421, 2015.

[Kis06] Mark Kisin. Crystalline representations and F-crystals. In *Algebraic geometry and number theory*, volume 253 of *Progr. Math.*, pages 459–496. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2006.

[Kis08] Mark Kisin. Potentially semi-stable deformation rings. *J. Amer. Math. Soc.*, 21(2) :513–546, 2008.

[Kis09a] Mark Kisin. The Fontaine-Mazur conjecture for GL_2. *J. Amer. Math. Soc.*, 22(3) :641–690, 2009.

[Kis09b] Mark Kisin. Moduli of finite flat group schemes, and modularity. *Ann. of Math. (2)*, 170(3) :1085–1180, 2009.

[LHL19] Daniel Le, Bao V. Le Hung, and Brandon Levin. Weight elimination in Serre-type conjectures. *Duke Math. J.*, 168(13) :2433–2506, 2019.

[LHMM] Bao V. Le Hung, Ariane Mézard, and Stefano Morra. Local model theory for non-generic tame potentially Barsotti-Tate deformation rings. `https://arxiv.org/pdf/2311.16617.pdf`. preprint (2023).

[LLHLMa] Daniel Le, Bao Viet Le Hung, Brandon Levin, and Stefano Morra. Extremal weights and a tameness criterion for mod p-Galois representations. `https://arxiv.org/abs/2107.12240`. preprint (2022).

[LLHLMb] Daniel Le, Bao Viet Le Hung, Brandon Levin, and Stefano Morra. Serre weights for three-dimensional wildly ramified galois representations. Algebra&Number Theory. (to appear).

[LLHLM23] Daniel Le, Bao V. Le Hung, Brandon Levin, and Stefano Morra. Local models for Galois deformation rings and applications. *Invent. Math.*, 231(3) :1277–1488, 2023.

[Maz89] Barry Mazur. Deforming Galois representations. Galois groups over $\mathbb{Q}$, Proc. Workshop, Berkeley/CA (USA) 1987, Publ., Math. Sci. Res. Inst. 16, 385-437 (1989)., 1989.

[MT90] Barry Mazur and Jacques Tilouine. Galois representations, Kähler differentials and “main conjectures”. *Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci.*, 71 :65–103, 1990.

[Paš15] Vytautas Paškūnas. On the Breuil-Mézard conjecture. *Duke Math. J.*, 164(2) :297–359, 2015.

[PR08] G. Pappas and M. Rapoport. Twisted loop groups and their affine flag varieties. With an appendix by T. Haines and M. Rapoport. *Adv. Math.*, 219(1) :118–198, 2008.

[PR09] George Pappas and Michael Rapoport. Φ-modules and coefficient spaces. *Mosc. Math. J.*, 9(3) :625–663, back matter, 2009.

[Pyv20] Alexandre Pyvovarov. Generic smooth representations. *Doc. Math.*, 25 :2473–2485, 2020.

[Sai97] Takeshi Saito. Modular forms and p-adic Hodge theory. *Invent. Math.*, 129(3) :607–620, 1997.

[San16] Fabian Sander. A local proof of the Breuil-Mézard conjecture in the scalar semi-simplification case. *J. Lond. Math. Soc., II. Ser.*, 94(2) :447–461, 2016.

[Ser87] Jean-Pierre Serre. Sur les représentations modulaires de degré 2 de Gal$(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$. *Duke Math. J.*, 54(1) :179–230, 1987.

[Sho18] Jack Shotton. The Breuil-Mézard conjecture when $l \neq p$. *Duke Math. J.*, 167(4) :603–678, 2018.

[Tun21a] Shen-Ning Tung. On the automorphy of 2-dimensional potentially semistable deformation rings of $G_{\mathbb{Q}_p}$. *Algebra Number Theory*, 15(9) :2173–2194, 2021.

[Tun21b] Shen-Ning Tung. On the modularity of 2-adic potentially semi-stable deformation rings. *Math. Z.*, 298(1-2) :107–159, 2021.

[TW95] Richard Taylor and Andrew Wiles. Ring-theoretic properties of certain Hecke algebras. *Ann. of Math. (2)*, 141(3) :553–572, 1995.

[Wil95] Andrew Wiles. Modular elliptic curves and Fermat’s Last Theorem. *Ann. Math. (2)*, 141(3) :443–551, 1995.

Stefano Morra • *E-mail :* `morra@math.univ-paris13.fr`, Lab. d’Analyse, Géométrie, Algèbre, 99 Av. Jean Baptiste Clément, 93430 Villetaneuse, France