LA CONJECTURE D'IGUSA SUR LES SOMMES EXPONENTIELLES POUR LES SINGULARITÉS NON-RATIONELLES

1. INTRODUCTION

Les sommes finies de vecteurs dans le plan jouent beaucoup de rôles en mathématiques, par exemple pour le traitement du signal via la transformation de Fourier discrète, mais aussi dans de nombreux problèmes de théorie des nombres. Inspiré par les conjectures de Weil, Igusa formule dans les années 70 une série de conjectures dans un programme de recherche motivé par les principes locaux-globaux et les résultats de Birch qui généralisent le principe de Hasse. Ainsi Igusa met en avant en 1978 une conjecture sur les sommes exponentielles et démontre le cas homogène lisse. Le cas des singularités non rationelles de cette conjecture vient d'être résolu par R. Cluckers du CNRS à Lille, M. Mustaţă de l'université de Michigan, et K. H. Nguyen de l'université KULeuven. La bourse ERC Consolidator MOTMELSUM a partiellement financé cette collaboration et pris fin avec la résolution de la conjecture.

2. Les sommes finies de vecteurs dans le plan

Commençons par un exemple facile. Identifions tous d'abord et comme d'habitude les vecteurs de $\mathbb{R}^2$ avec les nombres complèxes et considérons un polygone régulier à N sommets dans le cercle unité. Nous supposons que les sommets du polygone sont les racines N-ièmes de l'unité. Imaginons un procédé simple qui associe à un entier k le sommet $\exp(2\pi ik/N)$. Il est facile de voir que la somme des N sommets du polygone vaut zéro ; en d'autres termes, l'ensemble des entiers est équidistribué dans ce polygone par ce procédé. Plus généralement, on peut varier sur ce procédé avec un ensemble A fini quelconque et f une fonction de A à valeurs dans $\mathbb{Z}$. On associe à un élément a dans A le sommet $\exp(2\pi if(a)/N)$. En étudiant la somme $\sum_{a\in A}\exp(2\pi if(a)/N)$ on peut obtenir de l'information sur la distribution de A par la paire (f,N). On va dire que A est équidistribué par la paire (f,N) si la somme $\sum_{a\in A}\exp(2\pi if(a)/N)$ vaut zéro. Comme variante, pour f et g des fonctions d'un ensemble fini A dans $\mathbb{Z}$ satisfaisant l'inégalité

$$|\sum_{a\in A}\exp(2\pi if(a)/N)| < |\sum_{a\in A}\exp(2\pi ig(a)/N)|,$$

on peut dire que la distribution de A par (f,N) est plus proche de l'équidistribution que la distribution de A par (g,N). La situation extrême pour f une fonction constante modulo N rend le module de la somme $\sum_{a\in A}\exp(2\pi if(a)/N)$

maximal. Enfin, on peut encore imaginer une variante laissant varier N, comme nous le ferons plus bas.

Considérons maintenant un cas important, qui introduit de la géométrie. Fixons un polynôme f de n-variables dans $\mathbb{Z}[x_1, ..., x_n]$ et $N > 1$. Pour des raisons déjà mentionnées, nous supposons que f est non constant. Comme $\mathbb{Z}^n$ est un ensemble infini, en observant que $f(x) \equiv f(y) \bmod N$ si $x \equiv y \bmod N$, on prend pour A naturellement l'ensemble fini $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^n$ et on définit la somme finie

$$\sum_{x \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^n} \exp(\frac{2\pi i f(x)}{N}).$$

On normalise cette somme en prenant la moyenne et on note :

$$S_{f,N} := \frac{1}{N^n} \sum_{x \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^n} \exp(\frac{2\pi i f(x)}{N}).$$

La question principale est de cherecher de bonnes estimations de ces sommes $S_{f,N}$. Le théorème des restes chinois permet de simplifier légèrement les arguments. Si en effet on écrit $N = \prod_i p_i^{m_i}$ et $1/N = \sum_i a_i/p_i^{m_i}$, avec des premiers différents p_i et des entiers $a_i \neq 0$ et $m_i > 0$, on obtient

$$S_{f,N} = \prod_i S_{a_i f,\ p_i^{m_i}}.$$

Ainsi, on se ramène au cas où N est une puissance positive d'un nombre premier.

Il y a d'autres sommes intéressantes associées avec f et N. Ci-dessus, on a associé à chaque entier k le point $\exp(2\pi i k/N)$, à partir de la donnée d'un homomorphisme du groupe fini $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ vers le cercle unitaire S^1. On va changer le groupe fini et l'homomorphisme en prenant le groupe $G = (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ des éléments inversible modulo N et un homomorphisme de groupes $\chi : G \to S^1$, appelé dans ce cas *caractère multiplicatif*. On peut étendre χ à $\mathbb{Z}$ en posant $\chi(x) := \chi(x \bmod N)$ si x est premier à N et $\chi(x) := 0$ autrement. On peut alors définir la somme associée au caractère multiplicatif χ

$$T_{f,\chi,A} := \sum_A \chi(f(y))$$

quand A est un ensemble fini et f est une fonction de A dans $\mathbb{Z}$.

3. Comment interviennent les singularités ?

Pour un polynôme f comme ci-dessus et un nombre premier p, le cas le plus facile des sommes S_{f,p^m} se présente quand le système d'équations $\frac{\partial f}{\partial x_1} = ... = \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$ n'a pas de solutions dans une clôture algébrique du corps fini $\mathbb{F}_p$ à p éléments. Informellement, la condition dit que la fonction f dans un petit voisinage de chaque point est proche d'une fonction linéaire, ce qui est relié à l'équidistribution du jeu ci-dessus. Plus précisemment, on a

$S_{f,p^m} = 0$ pour tout nombre naturel $m > 1$ dans ce cas. Dans un deuxième temps, on étudie les solutions du système d'équations

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = ... = \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0, \tag{3.1}$$

dans le corps des nombres algébriques $\overline{\mathbb{Q}}$. Un point x_0 qui satisfait l'équation (3.1) est appelé un *point critique* de f ; dans ce cas, on dit aussi que $f(x_0)$ est une *valeur critique* de f et que x_0 est un *point singulier* du polynôme $f - f(x_0)$. C'est bien connu par le résultat de Sard que l'ensemble V_f des valeurs critiques de f est fini. On se ramène donc à étudier juste l'union des ensembles $f^{-1}(a)$ avec a dans V_f. Une idée d' Igusa précise de bonnes estimations de S_{f,p^m} en termes d'invariants de f aux points critiques. Dans l'exemple simple à une variable seulement, ce sont les multiplicités de $f(x)-a$ en les points critiques à valeur critique a qui sont clé pour l'estimation des sommes S_{f,p^m}. Pour $n > 1$, la multiplicité est remplacée naturellement par le seuil log canonique que nous rapelons en bas.

4. Travaux d'Igusa

Igusa a travaillé dans [9, 10, 11] sur les sommes exponentielles. Il étudie notamment des sous-sommes de S_{f,p^m} pour se ramener à une seule valeur critique qu'il peut supposer égale à zéro. Nous supposons à notre tour de maintenant que nous sommes dans ce cas de figure sauf mention contraire. Fixons un nombre premier p. Igusa introduit la notion de fonction zêta locale associée à un polynôme f et un caractère multiplicatif $\chi : (\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z})^\times \to S^1$ (où k est un nombre naturel). Supposons que $k \geq 0$ est le plus petit nombre dans le sens qu'il n'y a pas d'entier $0 \leq k' < k$ tel que χ s'écrit comme composition $(\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z})^\times \to (\mathbb{Z}/p^{k'}\mathbb{Z})^\times \to S^1$. Si $k = 0$, on dit que le caractère χ est *trivial*, et on le note par χ_0. Pour tout $m \geq 0$, on peut donc considérer les ensembles $F_m = \{x \in \mathbb{Z}^n | f(x) = 0 \bmod p^m\}$ et $A_m = F_m \bmod p^{m+k} \subset (\mathbb{Z}/p^{m+k}\mathbb{Z})^n$. C'est facile de voir que la fonction $\chi(\frac{f}{p^m}) : A_m \to S^1$ est bien définie. Donc on peut consider des sommes finies

$$T_{f,\chi,m} = \frac{1}{p^{m+k}} \sum_{x \in A_m} \chi(\frac{f(x)}{p^m}).$$

Igusa définit la fonction zêta locale par

$$Z_{f,\chi,s} = \sum_{m \geq 0} T_{f,\chi,m} p^{-ms}$$

pour $s > 1$ et il démontre que $Z_{f,\chi,s}$ est une fonction rationelle de p^{-s}. De plus, sous l'hypothèse que 0 est la seule valeur critique de f, Igusa démontre qu'il n'y a qu'un nombre fini de caractères χ tels que $Z_{f,\chi,s} \neq 0$. D'autre part, si s_0 est un pôle de $Z_{f,\chi,s}$, alors la partie réele $\Re(s_0)$ est un nombre rationel négatif et la multiplicité du pôle s_0 est égale ou inférieur à n. On pose $\sigma_{f,p}$ pour désigner la valeur minimale de toutes les valeurs $-\Re(s)$ où s est un pôle de $Z_{f,\chi,s}$ pour $\chi \neq \chi_0$ ou de $Z_{f,\chi_0,s}(p^{s+1} - 1)$ et on pose $\sigma_{f,p} = +\infty$ s'il

n'existe aucun tel pôle. Igusa a démontré que la somme exponentielle S_{f,p^m} est calculée par les fonctions zêta locales et que, pour tout $\sigma < \sigma_{f,p}$ il existe un nombre positif $C(\sigma, p)$ tel que

$$|S_{f,p^m}| \leq C(\sigma, p)p^{-m\sigma}$$

pour tout entier $m > 0$. La question qui se pose alors est de savoir si cette estimation est optimale. C'est ce dont nous parlerons dans ce qui suit.

Il y a deux questions qui raffinent ces résultats d'Igusa. La première question est comment peut-on calculer la valeur $\sigma_{f,p}$ et connaître les pôles des fonctions zêta locales associées à f. C'est le but de la Conjecture de Monodromie de comprendre ceci. La deuxième question est comment peut-on recoller l'information pour chaque nombre premier p pour obtenir de l'information globale, c'est-à-dire pour la dependence de $\sigma_{f,p}$ et $C(\sigma, p)$ en p.

Pour la première question, Igusa introduit la Conjecture de Monodromie qui prédit que les pôles de fonctions zêta locales apparaissent quand on calcule les valeurs propres de l'action de monodromie dans certains groupes de cohomologie associés avec la fibre de Milnor de f. De plus, la version forte de cette conjecture dit que ces pôles peuvent être calculés par le polynôme de Bernstein-Sato $b_f(s)$ de f. Actuellement, on sait peu de choses sur ces pôles en relation avec $b_f(s)$. De toute façon, on sait que l'ensemble $R = \{\sigma_{f,p} \mid p \text{ premier}\}$ est fini.

Pour la deuxième question, Igusa introduit une conjecture sur les sommes exponentielles S_{f,p^m} pour f un polynôme homogène et sous la condition $\sigma_f > 1$ avec

$$\sigma_f := \liminf_{p \to +\infty} \sigma_{f,p}.$$

On peut généraliser cette conjecture d'Igusa par la conjecture suivante :

Conjecture 4.1. *Pour toute constante $\sigma < \sigma_f$, il existe une constante C_σ tel que pour tout nombre premier p, pour tout entier $m > 1$ on a*

$$|S_{f,p^m}| \leq C_\sigma p^{-m\sigma}. \tag{4.1}$$

De plus, si f est homogène, l'inégalité (4.1) *est aussi vraie pour $m = 1$.*

Remarque 4.2. (i) On retrouve la conjecture originale d'Igusa si $\sigma_f > 1$ et f est homogène. La variante 4.1 de la conjecture d'Igusa vient de [6].

(ii) Si $f = x_1^2 x_2 + x_1$ on a $\sigma_f = +\infty$ mais $S_{f,p} = p$ pour tout p. Ceci montre qu'on est obligé de traiter le cas $m = 1$ séparément.

(iii) Si f est homogène et la conjecture est vraie pour $m > 1$ alors la conjecture pour tout $m > 0$ est vraie aussi, voir [4]. On se concentre donc sur la première partie de la conjecture 4.1.

Nous renvoyons à [8] et [3] pour de plus amples détails et références sur les fonctions zeta locales d'Igusa et leurs généralisations motiviques.

5. Notre travail

Dans le travail [5], nous avons démontré cette deuxième conjecture d'Igusa, sur les sommes exponentielles S_{f,p^m} dans la forme de la Conjecture 4.1 dans le cas où f n'a pas que des singularités rationelles, c'est-à-dire, avec $\sigma_f \leq 1$. Dans ce cas, la valeur de σ_f est connue précisemment, c'est un invariant de f qui est appelé le *seuil log canonique* de f. Nous rappelons la définition du seuil log canonique de f en utilisant les intégrales complexes, comme suit. Le seuil log canonique de f en un point $P \in \mathbb{C}^n$, noté par $\mathrm{lct}_P(f)$, est la valeur maximale $+\infty \geq \alpha > 0$ tel que la fonction $\dfrac{1}{|f|^{2s}}$ est localement intégrable autour de P pour tout s avec $0 < s < \alpha$. Le seuil log canonique de f noté par $\mathrm{lct}(f)$ est la valeur minimale parmie les seuils log canoniques de f en les points P. On peut retrouver le seuil log canonique de f en prenant une résolution de singularités donnée par les travaux d'Hironaka ou encore en regardant les lieux de contact de f dans les espaces des arcs, voir [12]. En particulier, on sait que $\mathrm{lct}(f) \leq \sigma_f$ et de plus, si $\sigma_f \leq 1$ alors on a (essentiellement) l'égalité.

On rappelle qu'une résolution plongée de singularités du couple $(\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}, f)$ est en particulier un morphisme propre de variéties lisses $h : Y \to \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ tel que h est un isomorphisme en dehors de $f^{-1}(0)$, et dans un voisinage de tout point P tel que $f(h(P)) = 0$, la solution de l'équation $f(h(y)) = 0$ est une union des hyperplanes coordonées pour des coordonées locales bien choisies. Ainsi, on peut écrire $(f \circ h)^{-1}(0) = \cup_{i \in I} E_i$ avec des variétés lisses E_i de dimension $n-1$. Si h est une résolution de singularités de f, pour toute variété lisse E_i comme ci-dessus on va associer à E_i la paire d'entiers $(N_i, \nu_i - 1)$ de multiplicités le long de E_i de la fonction $f \circ h$ et de la fonction déterminant de matrice Jacobienne de h. En utilisant une telle résolution de singularités, Igusa calcule les fonctions zêta locales et il trouve que si s est un pôle d'une fonction zêta locale de f alors la partie réele $\Re(s)$ est $-\frac{\nu_i}{N_i}$ pour une certaine E_i, mais la réciproque n'est pas souvent vraie. De plus, on sait que le seuil log canonique de f est la valeur minimale parmie les valeurs $\frac{\nu_i}{N_i}$ comme ci-dessus.

Dans notre travail [5], nous avons utilisé des relations entre les sommes exponentielles et les fonctions zêta locales comme présenté dans [8]. La résolution de singularités nous fournit une formule pour les fonctions zêta locales. En estimant les sommes associées aux caractères multiplicatifs, nous explorons la condition géométrique de la résolution de singularités qui peut donner une obstruction pour la conjecture d'Igusa. Quand cette condition d'obstruction apparaît pour une résolution h, nous utilisons des techniques du programme de modèles minimaux pour donner une bonne relation entre les paires associées $(N_i, \nu_i - 1)$ données par h comme ci-dessus et le seuil log canonique de f. Avec cette relation, nous pouvons démontrer que

Theorem 5.1 ([5]). *Si* 0 *est la seul valeur critique de* f *alors il existe une constante* $C > 0$ *tel que pour tout entier* $m > 1$*, pour tout nombre premier* p

on a

$$|S_{f,p^m}| \leq Cm^{n-1}p^{-m\,\mathrm{lct}(f)}$$

Remarque 5.2.

(i) Comme essentiellement $\mathrm{lct}(f) = \sigma_f$ si f n'a pas des singularités rationelles (voir [5] pour les conditions précises), le théorème 5.1 implique la conjecture 4.1 dans ce cas.

(ii) Si f a deux ou même plus de valeurs critiques, on dénote $\alpha(f)$ la valeur minimale parmie toutes les valeurs $\mathrm{lct}(f-a)$ où a est une valeur critique de f. Nous démontrons qu'il existe une constante $C > 0$ tel que pour tout entier $m > 1$, pour tout nombre premier p on a

$$|S_{f,p^m}| \leq Cm^{n-1}p^{-m\alpha(f)}.$$

Ces résultats de [5] résoudent la Conjecture 4.1 dans le cas de singularités non rationelles.

6. Le programme d'Igusa pour les principes locaux-globaux

Par quelle question motivante Igusa est-il arrivé à formuler sa conjecture sur les sommes exponentielles ? C'est le sujet de ce dernier paragraphe.

Si f est un polynôme dans $\mathbb{Z}[x_1, ..., x_n]$, une question très importante porte sur l'existence de solutions de f dans $\mathbb{Z}^n$. On va supposer que f est homogène. Comme clairement $f(0) = 0$ on va plutôt se demander quand f a une solution x non triviale, c'est-à-dire $x \neq 0$. Il y a une collection naturelle de corps, les complétions de $\mathbb{Q}$, qui comprend $\mathbb{R}$ et les corps p-adiques.

Si f a une solution non triviale dans $\mathbb{Z}^n$, ceci implique que f a une solution p-adique non triviale pour tout p, ainsi qu'une solution non triviale réelle. La réciproque de cette assertion (appelé principe local-global) n'est pas vraie en général. Une question naturelle serait de caractériser des conditions sur f sous lesquelles le principe local-global vaut pour f. Pour f un polynôme homogène de degré 2, le théorème de Hasse-Minkowski dit que le principe local-global est vrai pour f. Si f est de degré 3, le principe local-global est vrai si n est grand (voir [7]). En général, si f est de degré $d > 2$, Birch a démontré dans [1] que le principe local-global est vrai si de plus on suppose que f a une solution non triviale réelle et p-adique pour tout p qui est lisse, c'est-à-dire qu'elle n'est pas une solution des polynômes $\frac{\partial f}{\partial x_i}, 1 \leq i \leq n$ et si n est suffisamment grand comparé à la dimension du lieu singulier $\mathrm{Sing}(f)$ et à d. Weil a reformulé le théorème de Hasse-Minkowski comme une conséquence de la formule de Siegel. Inspiré par l'approche de Weil, Igusa a formulé un programme pour établir la formule de Siegel et pour en déduire le principe local-global pour f sous des conditions naturelles et généralisant celles de Birch. Dans ce programme, l'existence d'une formule de Poisson de type de Siegel est clé. Cette formule de Poisson existe si la conjecture d'Igusa sur les sommes exponentielles est vraie et $\sigma_f > 2$. La conjecture de monodromie d'Igusa, combinée avec le travail récent de Mustaţă-Popa dans [13] prédisent

qu'on a

$$\sigma_f \geq \frac{n - \dim \mathrm{Sing}(f)}{d}$$

si f est homogène. En combinant tout ce qui précède, on peut prédire que la formule de Poisson existe si

$$n - \dim \mathrm{Sing}(f) > 2d.$$

Avec cette connaissance actuelle, on peut reformuler le programme d'Igusa et suggérer que le principe local-global est vrai pour f si f a une solution réelle ainsi que p-adique pour tout p, non triviale et lisse et si $n - \dim \mathrm{Sing}(f) > 2d$. On note que, y arrivant par d'autres méthodes, Browning et Heath-Brown ont formulé une conjecture très reliée dans [2]. A présent on peut espérer la complétion du programme d'Igusa dans ces formes modernes.

Références

[1] B. J. Birch, *Forms in many variables*, Proc. Roy. Soc. Ser. A. Vol 265, 245–263 (1961/1962).

[2] T. D. Browning and D. R. Heath-Brown, *Forms in many variables and differing degrees*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS). Vol 19, 357–394 (2017).

[3] A. Chambert-Loir, J. Nicaise, and J. Sebag, *Motivic integration*, Progress in Mathematics, Vol. 325, Birkhäuser/Springer, New York, (2018).

[4] R. Cluckers, *The modulo p and p^2 cases of the Igusa Conjecture on exponential sums and the motivic oscillation index*, Int. Math. Res. Not. (IMRN) Vol. 2008, (2008)

[5] R. Cluckers, M. Mustaţă and K. H. Nguyen, *Igusa's conjecture for exponential sums : optimal estimates for non-rational singularities*, Forum Math. Pi **7**, 2019.

[6] R. Cluckers, W. Veys, *Bounds for p-adic exponential sums and log-canonical thresholds*, Amer. J. Math. **138** (1), 61–80 (2016).

[7] H. Davenport, *Cubic forms in sixteen variables*, Proc. Roy. Soc. Ser. A. **272**, 285–303 (1963).

[8] J. Denef, *Report on Igusa's local zeta function*, Séminaire Bourbaki **1990/91** Exp. no. 741, 359–386 (1991).

[9] J. I. Igusa, *Complex powers and asymptotic expansions I*, J. reine angew. Math. **268/269**, 110-130 (1974) ; Ibid. *II*, **278/279**, 307–321 (1975).

[10] J. I. Igusa, *Lectures on forms of higher degree (notes by S. Raghavan)*, Tata Institute of Fundamental Research, Lectures on Math. and Phys. **59**, Springer-Verlag, Heidelberg-New York-Berlin (1978).

[11] J. I. Igusa, *A Poisson formula and exponential sums*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IAMath. Vol 23, 223–244 (1976).

[12] M. Mustata, *Singularities of pairs via jet schemes*, J. Amer. Math. Soc. **15** (3), 599–615 (2002).

[13] M. Mustaţă and M. Popa, *Hodge ideals for Q-divisors, V-filtration, and minimal exponent*, arXiv :1807.01935.