VALEURS ZÊTA ET VALEURS ZÊTA MULTIPLES

TUAN NGO DAC

Ce texte a pour but de présenter quelques progrès plus ou moins récents sur les valeurs zêta et une de leurs généralisations connue sous le nom de valeurs zêta multiples dans le cadre classique et dans celui en caractéristique positive. Il est basé sur la présentation faite par l'auteur lors de la "Journée commune du Pôle Sciences du Numériques et de la Fédération Normandie-Mathématiques" en février 2022.

1. Valeurs zêta et valeurs zêta multiples d'Euler

1.1. Motivation. La fonction zêta de Riemann est donnée par la série

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

qui est convergente pour tout $s \in \mathbb{C}$ avec $\mathrm{Re}(s) > 1$. On montre qu'elle peut être étendue au plan complexe avec un produit d'Euler et une équation fonctionnelle. Malgré de nombreuses percées au cours des siècles, cette fonction zêta garde encore de nombreux secrets, et le plus grand mystère est connu sous le nom d'hypothèse de Riemann.

Les fonctions zêta ou les fonctions L sont calquées sur la fonction zêta de Riemann et apparaissent dans de nombreux contextes différents : les fonctions zêta de Dedekind associées aux corps de nombres, les fonctions zêta de Hasse-Weil associées aux variétés algébriques sur des corps finis, et les fonctions L associées aux formes automorphes et aux représentations galoisiennes. On peut dire qu'elles jouent un rôle central dans la théorie des nombres moderne. L'exemple le plus célèbre est celui qui a permis à Wiles de résoudre la conjecture de Shimura-Taniyama et le dernier théorème de Fermat.

Parallèlement à l'étude des fonctions zêta, celle de leurs valeurs spéciales et de leurs généralisations donne lieu à de nombreux résultats et conjectures profondes en théorie des nombres. Par exemple, la formule analytique du nombre de classes concerne les valeurs spéciales des fonctions zêta de Dedekind. Pour les valeurs spéciales des fonctions zêta de Hasse-Weil, il existe des conjectures formulées par Birch et Swinnerton-Dyer, Deligne, Beilinson et Bloch-Kato, entre autres.

1.2. Valeurs zêta multiples. Les valeurs zêta multiples d'Euler (MZV en abrégé) sont des nombres réels de la forme

$$\zeta(n_1, \dots, n_r) = \sum_{0<k_1<\dots<k_r} \frac{1}{k_1^{n_1} \dots k_r^{n_r}}, \quad \text{où } n_i \geq 1, n_r \geq 2.$$

---

[1]Date: mai 2022.

Ici r est appelé la profondeur et $w = n_1 + \cdots + n_r$ est appelé le poids de la présentation $\zeta(n_1, \ldots, n_r)$. Ces valeurs ont été étudiées par les mathématiciens et les physiciens en raison de leurs nombreuses connexions avec de différents domaines tels que la géométrie arithmétique, la physique des hautes énergies, la théorie des noeuds et la théorie des nombres.

1.2.1. *Valeurs zêta aux entiers pairs.* Lorsque $r = 1$ et $n \geq 2$, on retrouve les valeurs zêta étudiées par Leonhard Euler au 18e siècle qui sont des valeurs spéciales de la fonction zêta de Riemann

$$\zeta(n) := \sum_{0<k} \frac{1}{k^n}.$$

La condition $n \geq 2$ assure que la série ci-dessus est convergente. En fait, c'est un fait très connu que la série harmonique diverge, c'est-à-dire

$$\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k} = +\infty.$$

La première preuve est due à Nicolas Oresme en 1360. Il était évêque de Lisieux, traducteur et conseiller du roi Charles V. Le laboratoire de mathématiques de l'Université de Caen Normandie porte aujourd'hui son nom.

Le célèbre problème connu sous le nom de problème de Bâle demandait de trouver une formule fermée pour la valeur zêta $\zeta(2)$. Une solution a été trouvée par Euler en 1735 qui a prouvé que

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}.$$

Nous expliquons maintenant sa belle et élémentaire preuve. En regardant les zéros de la fonction sinus, on obtient

$$\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = \prod_{k \geq 1} \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right).$$

D'autre part, par la formule de Taylor, on a aussi

$$\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = 1 - \frac{(\pi x)^2}{3!} + \frac{(\pi x)^4}{5!} + \ldots.$$

On compare les coefficients de x^2 pour obtenir l'égalité désirée. Cette méthode permet à Euler de prouver un résultat plus général : si n est pair, alors

$$\frac{\zeta(n)}{\pi^n} \in \mathbb{Q}.$$

En utilisant ce résultat et le théorème de Lindemann (1882) qui dit que π est un nombre transcendant, nous déduisons

Théorème 1. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et n pair, $\zeta(n)$ est un nombre transcendant.*

1.2.2. *Valeurs zêta aux entiers impairs.* Il est naturel de se demander ce que l'on peut dire des valeurs zêta impaires. Sont-elles des nombres transcendants ? Il s'avère que la situation change radicalement et que cette question est beaucoup plus difficile et attire toujours de nombreux mathématiciens de premier plan. Nous pouvons même dire que, malgré de nombreux progrès spectaculaires, elle reste totalement ouverte.

Cependant, nous expliquons ci-dessous les développements les plus importants concernant l'irrationalité des valeurs zêta impaires. Après les travaux d'Euler sur les valeurs zêta paires, on ne savait rien des valeurs zêta impaires. En 1978, Roger Apéry a stupéfié la communauté des mathématiciens en annonçant une preuve que $\zeta(3)$ n'est pas un nombre rationnel,

$$\zeta(3) \notin \mathbb{Q}.$$

Récemment, Ball et Rivoal (2000) ont obtenu un résultat important concernant la nature irrationnelle des valeurs zêta impaires :

Théorème 2 (Ball-Rivoal)**.** *On a* $\dim_{\mathbb{Q}}\langle \zeta(3), \zeta(5), \dots \rangle = +\infty$.

Ce théorème peut être amélioré et rendu effectif. Rivoal (2002) a montré qu'il existe un nombre irrationnel parmi les neuf valeurs $\zeta(5), \zeta(7), \dots, \zeta(21)$. Puis Zudilin (2001) a amélioré ce résultat et a prouvé qu'il existe un nombre irrationnel parmi les quatre valeurs $\zeta(5), \zeta(7), \zeta(9), \zeta(11)$. Il s'agit du meilleur résultat obtenu jusqu'à présent. Cependant, la question de savoir si $\zeta(5)$ est irrationnel ou non reste ouverte. Nous sommes très loin de la transcendance des valeurs zêta impaires.

1.3. **Produit harmonique et produit de mélange.** Dans sa recherche de formes fermées pour $\zeta(3)$, Euler (1776) a découvert des identités entre les MZVs, en particulier,

$$\zeta(3) = \zeta(1, 2).$$

On peut alors facilement montrer que le produit de deux MZVs est une combinaison linéaire à coefficients entiers de MZVs. Il est donc équivalent à déterminer les relations polynomiales à coefficients rationnels entre les MZVs ou à déterminer les relations $\mathbb{Q}$-linéaires entre eux.

En fait, il y a deux façons de le faire. La première méthode est celle du produit harmonique. Par exemple, si $n_1, n_2 \geq 2$, on a

$$\begin{aligned}
\zeta(n_1)\zeta(n_2) &\overset{*}{=} \left(\sum_{0<k_1} \frac{1}{k_1^{n_1}}\right)\left(\sum_{0<k_2} \frac{1}{k_2^{n_2}}\right) \\
&= \sum_{0<k_1<k_2} \frac{1}{k_1^{n_1} k_2^{n_2}} + \sum_{0<k_2<k_1} \frac{1}{k_1^{n_1} k_2^{n_2}} + \sum_{0<k_1=k_2} \frac{1}{k_1^{n_1} k_2^{n_2}} \\
&= \zeta(n_1, n_2) + \zeta(n_2, n_1) + \zeta(n_1 + n_2).
\end{aligned}$$

Notez que les poids des MZVs à droite sont les mêmes et sont égaux à $n_1 + n_2$. Nous laissons au lecteur le soin de réaliser les détails pour le produit de deux MZVs.

La deuxième méthode est celle du produit itéré. Nous définissons d'abord les intégrales itérées par la formule suivante

$$I(a_1, \dots, a_n) := \int_{0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n \leq 1} \frac{dt_1}{t_1 - a_1} \wedge \cdots \wedge \frac{dt_n}{t_n - a_n}.$$

La multiplication d'intégrales itérées donne le produit de mélange :

- Mélanger $0 \leq t_i \leq 1$ et $0 \leq s_j \leq 1$ de toutes les manières compatibles telles que $t_i \leq s_j$ ou $t_i \geq s_j$.
- Définir $I(w_1)\, I(w_2) = I(w_1 \sqcup\!\sqcup\, w_2)$.

Kontsevich a prouvé la formule suivante :

$$\zeta(s_1, \ldots, s_k) = (-1)^k I(1, \{0\}^{s_1-1}, \ldots, 1, \{0\}^{s_k-1}).$$

On peut donc définir le produit de mélange étendu (incluant $\zeta(1)$ par régularisation). Illustrons par un exemple concret. Comme $\zeta(2) = -I(1,0)$, nous avons le produit de mélange

$$\begin{aligned}\zeta(2)\zeta(2) &= I(1,0)\, I(1,0) \\ &= I(1,0,1,0) + I(1,1,0,0) + I(1,1,0,0) \\ &\quad + I(1,1,0,0) + I(1,1,0,0) + I(1,0,1,0) \\ &= 2I(1,0,1,0) + 4I(1,1,0,0) \\ &= 2\zeta(2,2) + 4\zeta(1,3).\end{aligned}$$

Nous précisons que nous avons mélangé $(1,0)$ et $(1,0)$ de toutes les manières possibles de sorte que 1 soit avant 0 et que 1 soit avant 0.

1.4. **Relations linéaires entre les valeurs zêta multiples.**

1.4.1. *Relations de double mélange.* Rappelons que l'objectif principal de la théorie des valeurs zêta multiples est de déterminer toutes les relations $\mathbb{Q}$-linéaires entre les MZVs. Une façon possible de produire de telles relations linéaires est d'utiliser le produit harmonique et le produit de mélange. Par exemple, pour $\zeta(2)$ et $\zeta(2)$, le produit harmonique donne

$$\zeta(2)\zeta(2) \stackrel{*}{=} 2\zeta(2,2) + \zeta(4).$$

D'autre part, le produit de mélange que nous avons présenté ci-dessus donne

$$\zeta(2)\zeta(2) \stackrel{ш}{=} 2\zeta(2,2) + 4\zeta(1,3).$$

En mettant tout cela ensemble, on obtient

$$\zeta(4) = 4\zeta(1,3).$$

Ihara, Kaneko et Zagier (2006) ont conjecturé que ce type d'opérations exhauste toutes les relations linéaires sur $\mathbb{Q}$ entre les MZVs.

Conjecture 3 (Ihara-Kaneko-Zagier)**.** *Toute relation linéaire sur $\mathbb{Q}$ parmi les MZVs apparaît en comparant le produit harmonique et le produit de mélange étendu.*

Dans le même esprit, nous mentionnons une conjecture de Goncharov.

Conjecture 4 (Goncharov)**.** *Toute relation linéaire sur $\mathbb{Q}$ entre MZVs est une somme de relations entre les MZVs de même poids.*

Nous notons que la conjecture d'Ihara-Kaneko-Zagier implique la conjecture de Gontcharov. Cette dernière implique une conséquence forte que $\zeta(n)$ est irrationnel pour tout $n \geq 2$.

1.4.2. *Conjectures de Zagier et Hoffman.* Soit $k \in \mathbb{N}$. Nous considérons $\mathcal{Z}_k$ le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel engendré par tous les MZVs de poids k. Il est intéressant de noter que le nombre de MZVs de poids k est égal à 2^{k-2}.

En utilisant l'algorithme LLL (Lenstra-Lenstra-Lovász), les données numériques suggèrent que

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2^{k-2}	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
$\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{Z}_k^{num}$	1	1	1	2	2	3	4	5	7	9	12

Nous concluons qu'il existe de nombreuses relations linéaires $\mathbb{Q}$ parmi les MZVs dans $\mathcal{Z}_k$.

Nous définissons maintenant une séquence d'entiers d_k comme suit : $d_0 = 1, d_1 = 0$, et $d_2 = 1$, puis pour $k \geq 3$, $d_k = d_{k-2} + d_{k-3}$. Zagier (1994) a formulé la conjecture suivante :

Conjecture 5 (Zagier)**.** *Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a*

$$\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{Z}_k = d_k.$$

Peu après, Hoffman (1997) a proposé un raffinement de la conjecture de Zagier.

Conjecture 6 (Hoffman)**.** *Le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathcal{Z}_k$ a une base constituée de MZVs de poids k de la forme $\zeta(n_1, \dots, n_r)$ avec $n_i \in \{2, 3\}$.*

Ces conjectures de Zagier et Hoffman se composent de deux parties de nature différente. D'une part, la partie algébrique de la conjecture de Zagier concerne les bornes supérieures : $\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{Z}_k \leq d_k$. Pour la conjecture de Hoffman, on veut montrer que $\mathcal{Z}_k$ est engendré par des MZVs de poids k de la forme $\zeta(n_1, \dots, n_r)$ avec $n_i \in \{2, 3\}$. D'autre part, la partie transcendante de la conjecture de Zagier concerne les bornes inférieures : $\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{Z}_k \geq d_k$. Pour la conjecture de Hoffman, on veut montrer que les MZV de poids k de la forme $\zeta(n_1, \dots, n_r)$ avec $n_i \in \{2, 3\}$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$.

La partie algébrique de ces conjectures a été complètement résolue par les travaux de Terasoma (2002), Deligne-Goncharov (2005) et Brown (2012). Ils utilisent la théorie des motifs mixtes de Tate. Nous renvoyons le lecteur qui désire plus de détails à l'exposé au séminaire Bourbaki de Deligne (2013).

Théorème 7 (Terasoma, Deligne-Goncharov)**.** *Pour $k \in \mathbb{N}$, on a*

$$\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{Z}_k \leq d_k.$$

Théorème 8 (Brown)**.** *L'espace vectoriel $\mathcal{Z}_k$ est engendré par des MZVs de poids k de la forme $\zeta(n_1, \dots, n_r)$ avec $n_i \in \{2, 3\}$.*

Malheureusement, la partie transcendante est complètement hors de portée. Nous ne connaissons même pas un seul $k \in \mathbb{N}$ pour lequel $\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{Z}_k > 1$.

2. Valeurs zêta multiples en caractéristique positive

En caractéristique positive, il existe un cadre, à savoir le cadre des corps de fonctions, qui partage de profondes analogies avec celui des corps de nombres. Soit $\mathbb{F}_q$ un corps fini de caractéristique $p > 0$. On considère l'anneau $A := \mathbb{F}_q[\theta]$ des polynômes en une variable θ et $K := \mathbb{F}_q(\theta)$ son corps de fractions. On notera A_+

l'ensemble des polynômes unitaires dans A, et $K_\infty = \mathbb{F}_q((1/\theta))$ le complété de K en ∞. Puis $\mathbb{C}_\infty$ désigne le complété d'une clôture algébrique $\overline{K}$ de K en ∞.

L'analogie se résumé comme suit:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$
$$A_+ \subset A \subset K \subset K_\infty \subset \mathbb{C}_\infty$$

Pour toute suite d'entiers positifs $\mathfrak{s} = (s_1, \dots, s_r) \in \mathbb{N}^r$, Thakur (2004) a défini la valeur zêta multiple en caractéristique p (MZV en abrégé) par

$$\zeta_A(\mathfrak{s}) := \sum \frac{1}{a_1^{s_1} \dots a_r^{s_r}} \in K_\infty^*$$

où la somme parcourt l'ensemble $(a_1, \dots, a_r) \in A_+^r$ avec $\deg a_1 > \dots > \deg a_r$. Comme précédemment, r, $w(\mathfrak{s}) = s_1 + \dots + s_r$ sont appelés la profondeur et le poids de $\zeta_A(\mathfrak{s})$. Le lecteur attentif note qu'il y a moins de restrictions sur la suite $\mathfrak{s}$.

2.1. **Valeurs zêta multiples.** On considère le cas des valeurs zêta de profondeur 1, autrement dit $\mathfrak{s} = s_1 = s \geq 1$. Alors on retrouve les valeurs zêta de Carlitz

$$\zeta_A(s) := \sum_{a \in A_+} \frac{1}{a^s} \in K_\infty^*.$$

En effet, Carlitz (1935) a montré que si $q - 1 \mid s$ (c'est-à-dire s est "pair"), alors

$$\zeta_A(s)/\widetilde{\pi}^s \in K$$

où $\widetilde{\pi}$ est appelé la période de Carlitz qui est l'analogue de $2i\pi$. Puis Thakur (2009) a découvert l'identité

$$\zeta_A(q) + D_1\, \zeta_A(1, q-1) = 0, \quad \text{où } D_1 = \theta^q - \theta \in K^*.$$

Le lecteur peut la comparer avec l'identité prouvée par Euler $\zeta(3) = \zeta(1, 2)$.

Thakur a démontré des propriétés fondamentales de ces valeurs. En particulier, il a prouvé que le produit de deux MZVs est une combinaison linéaire à coefficients dans $\mathbb{F}_q$ de MZVs. Les formules précises sont plus compliquées. Par exemple, pour tous $a, b \in \mathbb{N}$, on a

$$\zeta_A(a)\zeta_A(b) = \zeta_A(a+b) + \sum_{0<i<a+b} \Delta_{a,b}^i \zeta_A(a+b-i, i)$$

avec

$$\Delta_{a,b}^i = \begin{cases} (-1)^{a-1}\binom{i-1}{a-1} + (-1)^{b-1}\binom{i-1}{b-1} & \text{si } (q-1) \mid i \text{ et } 0 < i < a+b, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Comme dans le cadre classique, le but de la théorie est de déterminer toutes les relations K-linéaires entre les MZVs. Heureusement, on peut aller plus loin et prouver des résultats plus forts que le cadre classique. Chang (2014) a démontré l'analogue de la conjecture de Goncharov et prouvé que toute relation K-linéaire entre les MZVs est somme de relations entre les MZVs de même poids. Par conséquent, il suffit de déterminer toutes les relations entre les MZVs de même poids. Par des calculs numériques, Todd et Thakur ont conjecturé:

Conjecture 9 (Conjecture de Zagier en caractéristique positive)**.** *On définit*

$$d(w) = \begin{cases} 1 & si\ w = 0, \\ 2^{w-1} & si\ 1 \leq w \leq q-1, \\ 2^{w-1} - 1 & si\ w = q, \end{cases}$$

et $d(w) = \sum_{i=1}^{q} d(w-i)$ *si* $w > q$*. Pour* $w \in \mathbb{N}$*, si* $\mathcal{Z}_w$ *désigne le* K*-espace vectoriel engendré par les MZVs de poids* w*, alors*

$$\dim_K \mathcal{Z}_w = d(w).$$

Conjecture 10 (Conjecture de Hoffman en caractéristique positive)**.** *Soit* $\mathcal{T}_w$ *l'ensemble des MZVs de poids* w *de la forme* $\zeta_A(s_1, \dots, s_r)$ *avec* $s_i \leq q$ *for* $1 \leq i < r$ *et* $s_r < q$*. Alors* $\mathcal{T}_w$ *forme une base de* $\mathcal{Z}_w$*.*

Nous présentons ci-dessous la liste de tous les cas connus où l'on peut déterminer complètement les dimensions de $\mathcal{Z}_w$:

- $w = 1$: on a $d(w) = 1$, et ce cas découle du fait que $\zeta_A(1) \neq 0$.
- $w = 2$ et $q = 2$: $d(w) = 1$, et ce cas est connu par Thakur (2004).
- $w = 2$ et $q > 2$: $d(w) = 2$, et ce cas a été prouvé par Mishiba (2015).
- $w = 3$ et $q = 2$: on a $d(w) = 2$, et ce cas est déjà connu par Thakur (2004).

2.2. **Résultats récents et idées de preuves.**

2.2.1. *Les énoncés.* Dans [8], nous démontrons la partie algébrique des conjectures précédentes:

Théorème 11. *Soit* $w \in \mathbb{N}$*. Alors* $\mathcal{Z}_w$ *est engendré par l'ensemble* $\mathcal{T}_w$ *composé des MZVs de poids* w *de la forme* $\zeta_A(s_1, \dots, s_r)$ *avec* $s_i \leq q$ *pour* $1 \leq i < r$ *et* $s_r < q$*.*

Par conséquent, nous obtenons une borne supérieure pour la dimension de $\mathcal{Z}_w$. Il s'agit de l'analogue du théorème de Brown et aussi de ceux de Deligne-Goncharov et de Terasoma. Contrairement au travail de Brown, notre preuve donne un algorithme pour exprimer chaque MZV de poids w comme une combinaison K-linéaire de MZVs dans l'ensemble $\mathcal{T}_w$.

Puis nous démontrons deux résultats pour la partie transcendante des conjectures précédentes.

Théorème 12. *Soit* $w \in \mathbb{N}$*. Soit* $\mathcal{T}_w^0$ *l'ensemble des MZVs de poids* w *de la forme* $\zeta_A(s_1, \dots, s_r)$ *avec* $s_i < q$ *for* $1 \leq i \leq r$*. Alors les MZVs de* $\mathcal{T}_w^0$ *sont linéairement indépendants sur* K*.*

Théorème 13. *Soit* $w \leq 2q-2$*. Alors* $\mathcal{T}_w$ *forme une base de* $\mathcal{Z}_w$*.*

2.2.2. *Idées de preuves.* La preuve du Théorème 11 utilise les techniques purement combinatoires. En effet, notre idée est très naïve: nous essayons d'inspirer des idées d'Ihara-Kaneko-Zagier en produisant par deux façons différentes des relations linéaires entre les MZVs à partir de l'identité de Thakur mentionnée plus haut, à savoir

$$\zeta_A(q) + D_1\, \zeta_A(1, q-1) = 0, \quad \text{avec } D_1 = \theta^q - \theta \in K^*.$$

Puis nous prouvons que cette manière produit toutes relations linéaires entre les MZVs. Plus précisément, en commençant par $\zeta_A(s_1, \dots, s_r)$ satisfaisant $s_1 > q$, nous trouvons un moyen d'exprimer $\zeta_A(s_1, \dots, s_r)$ comme une combinaison linéaire à coefficients dans K de $\zeta_A(t_1, \dots, t_k)$ avec $t_1 \leq$. Une fois que nous avons $s_1 \leq q$, nous continuons à abaisser la deuxième entrée s_2 jusqu'à ce que $s_2 \leq q$. En répétant ce processus plus un peu de travail supplémentaire, nous obtenons une preuve du Théorème 11.

Les preuves des Théorèmes 12 et 13 sont d'une saveur complètement différente. Elles sont basées sur trois ingrédients clés : la théorie des t-motifs introduite par Anderson (1986) et développée dans [2], une interprétation motivique des MZVs grâce au travail fondateur d'Anderson-Thakur (1990), et enfin un critère de transcendance très puissant appelé le critère d'Anderson-Brownawell-Papanikolas conçu dans [2]. Ce critère s'est avéré très fructueux en arithmétique des corps de fonctions. Plus précisément, il traite du système d'équations σ-linéaires et se lit comme suit.

En prenant t comme autre variable, nous désignons par $\mathbb{T}$ l'algèbre de Tate dans la variable t avec des coefficients dans $\mathbb{C}_\infty$ équipée de la norme de Gauss $\|.\|$. Pour $k \in \mathbb{Z}$, nous considérons le tordu k-ième de $\mathbb{C}_\infty((t))$ définie par

$$f = \sum_i a_i t^i \in \mathbb{C}_\infty((t)) \mapsto f^{(k)} := \sum_i a_i^{q^k} t^i \in \mathbb{C}_\infty((t)).$$

Nous étendons ce tordu aux matrices ayant des entrées dans $\mathbb{C}_\infty((t))$ de manière évidente.

Théorème 14 (Anderson-Brownawell-Papanikolas)**.** *Soit* $\Phi \in \operatorname{Mat}_\ell(\overline{K}[t])$ *une matrice telle que* $\det \Phi = c(t-\theta)^s$ *pour un certain* $c \in \overline{K}$ *et* $s \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$*. Soit* $\psi \in \operatorname{Mat}_{\ell \times 1}(\mathbb{T})$ *un vecteur satisfaisant* $\psi^{(-1)} = \Phi\psi$ *et* $\rho \in \operatorname{Mat}_{1\times\ell}(\overline{K})$ *tel que* $\rho\psi(\theta) = 0$*. Alors, il existe un vecteur* P *dans* $\operatorname{Mat}_{1\times\ell}(\overline{K}[t])$ *tel que*

$$P\psi = 0 \quad \textit{and} \quad P(\theta) = \rho.$$

Nous construisons d'abord des t-motifs qui lèvent les relations linéaires entre les MZVs. Ensuite, nous appliquons le critère d'Anderson-Brownawell-Papanikolas pour déduire des résultats de rationalité, ce qui à son tour nous ramène à résoudre un système d'équations σ-linéaires. Dans les cas concernés, nous montrons que toutes les solutions de ce système sont triviales, qui nous permettent de conclure.

Pour prouver le Théorème 13, nous ne pouvons pas appliquer directement notre méthode à l'ensemble $\mathcal{T}_w$. Il nous faut contourner en construisant un autre ensemble de MZVs noté $\mathcal{T}'_w$ ayant la même cardinalité que $\mathcal{T}_w$ pour étendre le Théorème 12 à cet ensemble. Nous obtenons ainsi une borne inférieure $\dim_K \mathcal{Z}_w \geq d(w)$. En combinant cette borne inférieure avec la borne supérieure du Théorème 11, on obtient $\dim_K \mathcal{Z}_w = d(w)$, et le Théorème 13 s'ensuit. Cette stratégie ne fonctionne pas dans le cas $w = 2q-1$ à cause du fait que $\zeta_A(2q-1)$ et $\zeta_A(1, 2q-2)$ sont colinéaires sur K.

Finalement, nous mentionnons que par une approche nouvelle, ces conjectures et leurs généralisations aux valeurs zêta multiples alternées ont été complètement résolues dans un travail récent de Im, Kim, Le, Pham et l'auteur [7].

References

[1] G. Anderson and D. Thakur. Tensor powers of the Carlitz module and zeta values. *Ann. of Math. (2)*, 132(1):159–191, 1990.

[2] G. Anderson, W. D. Brownawell, and M. Papanikolas. Determination of the algebraic relations among special Γ-values in positive characteristic. *Ann. of Math. (2)*, 160(1):237–313, 2004.
[3] F. Brown. Mixed Tate motives over $\mathbb{Z}$. *Ann. of Math. (2)*, 175:949–976, 2012.
[4] P. Deligne. Multizêtas, d'après Francis Brown. Séminaire Bourbaki. Vol. 2011/2012. Exposés 1043–1058. *Astérisque*, 352:161–185, 2013.
[5] P. Deligne and A. Goncharov. Groupes fondamentaux motiviques de Tate mixte. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 38(1):1–56, 2005.
[6] M. Hoffman. The algebra of multiple harmonic series. *J. Algebra*, 194:477–495, 1997.
[7] B.-H. Im, H. Kim, K. N. Le, T. Ngo Dac, and L. H. Pham. Zagier-Hoffman's conjectures in positive characteristic. *hal-03667755*, 2022.
[8] T. Ngo Dac. On Zagier-Hoffman's conjectures in positive characteristic. *Ann. of Math. (2)*, 194(1):361–392, 2021.
[9] T. Terasoma. Mixed Tate motives and multiple zeta values. *Invent. Math.*, 149(2):339–369, 2002.
[10] D. Thakur. *Function field arithmetic*. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 2004.
[11] D. Zagier. Values of zeta functions and their applications. In *First European Congress of Mathematics, Vol. II Paris, 1992)*, volume 120 of *Progr. Math.*, pages 497–512. Birkhäuser, Basel, 1994.

Normandie Université, Université de Caen Normandie - CNRS, Laboratoire de Math. Nicolas Oresme (LMNO), UMR 6139, 14000 Caen, France.

Email address: tuan.ngodac@unicaen.fr