Renormalisation algébrique des structures de régularité

Février 2019

Yvain Bruned[1], **Martin Hairer**[2], **Lorenzo Zambotti**[3]

[1] University of Edinburgh
[2] Imperial College London
[3] Laboratoire de Probabilités Statistique et Modélisation, Sorbonne Université, Paris
Email: `ybruned@ed.ac.uk, m.hairer@imperial.ac.uk`
`lorenzo.zambotti@upmc.fr`

Résumé

Nous présentons les idées principales de la renormalisation des équations aux dérivées partielles stochastiques, telle qu'elle apparaît dans la théorie des structures de régularité. Nous discutons de manière informelle la régularisation du bruit, la transformation du modèle canonique vers celui renormalisé, l'espace des modèles et la structure algébrique sous-jacente.

Dans l'article [13], le deuxième auteur de cette note a introduit une théorie des structures de régularité (RS, regularity structures en anglais) dans le but d'obtenir pour deux équations importantes une notion de 'solution', ainsi que des résultats d'existence et unicité, qui étaient des problèmes ouverts depuis des décennies. La première partie de [13] est une vraie *théorie*, dans le sens qu'elle peut être appliquée de la même façon à une vaste classe de problèmes ; cependant, la deuxième partie, qui traite les applications, contient de plus en plus d'arguments *ad hoc*, qui doivent être adaptés si utilisés dans des contextes différents. Pire, pour beaucoup d'autres équations intéressantes, l'approche de [13] devient impossible en pratique car la complexité combinatoire des objets impliqués peut devenir arbitrairement grande.

Heureusement, la situation a changé récemment. Le quatuor d'articles [13, 4, 8, 3] construit une *boîte noire* complètement automatique permettant d'obtenir des résultats d'existence (locale) et d'unicité (modulo élément du groupe de renormalisation) pour une large classe d'équations aux dérivées partielles stochastiques (EDPS), qui inclut

$$\partial_t u = \Delta u + (\partial_x u)^2 + \xi, \quad x \in \mathbf{R}, \tag{KPZ}$$
$$\partial_t u = \Delta u + u\,\xi, \quad x \in \mathbf{R}^2, \tag{PAM}$$
$$\partial_t u = \Delta u - u^3 + \xi, \quad x \in \mathbf{R}^3, \tag{Φ^4_3}$$

pour $\xi \in \mathscr{D}'(\mathbf{R}^d)$ une distribution (fonction généralisée de Schwarz) aléatoire et très peu régulière. L'exemple principal est le *bruit blanc en espace-temps*, mais la théorie s'applique à une classe très large de ξ.

Ces équations sont appelées *singulières*. Pourquoi ? On peut remarquer qu'il est possible de multiplier une distribution $T \in \mathscr{D}'(\mathbf{R}^d)$ et une fonction lisse $\psi \in C^\infty(\mathbf{R}^d)$

de façon canonique, en définissant le produit $\psi T = T\psi \in \mathscr{D}'(\mathbf{R}^d)$ par

$$\psi T(\varphi) = T\psi(\varphi) := T(\psi\varphi), \qquad \varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^d).$$

Mais si $\psi \notin C^\infty(\mathbf{R}^d)$, ce produit n'est en général pas bien défini. Or, chacune de ces équations contient un produit entre une distribution dans $\mathscr{D}'(\mathbf{R}^d)$ et une autre distribution ou une fonction qui n'est pas suffisamment régulière. Plus précisément :

— dans KPZ (*Kardar-Parisi-Zhang*), u n'est pas mieux que Hölder en espace, la dérivée $\partial_x u$ est donc une distribution et $(\partial_x u)^2$ n'est pas bien défini.
— dans PAM (*Parabolic Anderson Model)*, ξ est un bruit blanc en espace, u est une fonction non-lisse, donc $u\,\xi$ n'est pas bien défini.
— dans (Φ^4_3), u est elle-même une distribution et donc u^3 n'est pas bien défini.

Dans ces équations, la notion de solution est problématique, avant même de parler de résultats d'existence et unicité.

Régularisation. Pour contourner ce problème, on peut essayer de régulariser le bruit, résoudre l'équation et ensuite passer à la limite : soit $\xi_\varepsilon = \varrho_\varepsilon * \xi$ une régularisation de ξ, avec $(\varrho_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ une famille de mollificateurs pairs en espace-temps, et soit u_ε la solution de

$$\partial_t u_\varepsilon = \Delta u_\varepsilon + F(u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon, \xi_\varepsilon) \tag{1}$$

où F est une fonction non-linéaire d'une certaine classe, qui inclut les trois équations ci-dessus. La question naturelle est : Que se passe-t-il lorsque $\varepsilon \to 0$? Afin de contrôler cette limite, on a besoin d'une topologie sur les bruits telle que

1. l'application $\xi_\varepsilon \mapsto u_\varepsilon$ est continue
2. $\xi_\varepsilon \to \xi$ lorsque $\varepsilon \to 0$.

Le premier point requiert une topologie suffisamment forte, alors que le second requiert une topologie suffisamment faible. De fait, aucune solution ne paraît possible si la régularité de ξ est trop faible. La partie analytique de la théorie des structures de régularité (RS) fournit un cadre pour résoudre ce problème, en construisant, pour une équation donnée,

— un espace métrique $(\mathscr{M}, \mathrm{d})$ appelé *Espace des Modèles*
— un *relèvement canonique* de tout ξ_ε régulier vers un modèle $\mathbf{X}^\varepsilon \in \mathscr{M}$
— une *fonction continue* $\Phi : \mathscr{M} \to \mathscr{D}'(\mathbf{R}^d)$ telle que $u_\varepsilon = \Phi(\mathbf{X}^\varepsilon)$ résout l'équation régularisée (1).

Ce schéma est inspiré de la théorie des *Chemins Rugueux* (*Rough Paths* en anglais), initiée par Terry Lyons [14] et ensuite développée, parmi d'autres, par Massimiliano Gubinelli, dont les idées de chemins rugueux contrôlés [10] et branchants [11] ont servi d'inspiration directe dans l'élaboration des structures de régularité.

La théorie RS identifie une classe d'équations, appelées *sous-critiques*, pour lesquelles le modèle canonique $\mathbf{X}^\varepsilon \in \mathscr{M}$ encode *un nombre fini de fonctions explicites* obtenues à partir du bruit régularisé ξ_ε par des *multiplications ponctuelles* et des *convolutions* avec le noyau de la chaleur G ou des opportunes dérivées de G, disons par exemple $\partial_x G$. Parmi les composantes du modèle canonique $\mathbf{X}^\varepsilon \in \mathscr{M}$ on peut ainsi trouver

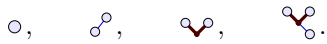
$$\xi_\varepsilon, \qquad \xi_\varepsilon(G * \xi_\varepsilon)\,, \qquad (\partial_x G * \xi_\varepsilon)^2, \qquad \xi_\varepsilon\,(G * (\partial_x G * \xi_\varepsilon)^2). \tag{2}$$

Par contre, on n'est pas obligé de considérer *toutes* les fonctions possibles de ce type : on ne s'attend typiquement pas par exemple à pouvoir donner un sens à ξ^2 et on ne considère donc pas ξ_ε^2 parmi les composantes de $\mathbf{X}^\varepsilon$.

Pour décrire les fonctions qui forment les composantes de $\mathbf{X}^\varepsilon$ nous utilisons une notation graphique : chaque fonction est représentée par un arbre enraciné, où

— les arêtes correspondent à des convolutions avec G (arêtes de type $|$) ou $\partial_x G$ (arêtes de type $\mathbf{|}$),
— chaque point de branchement correspond au produit ponctuel des fonctions que représentent les sous-arbres au-dessus du noeud en question
— les bruits sont représentés par des noeuds de type $\circ$.

Par exemple, les quatre fonctions dans (2) sont représentées par les arbres suivants :



(3)

Formellement, on voit $\mathbf{X}^\varepsilon$ comme une application linéaire envoyant l'espace $\mathcal{T}$ des combinaisons linéaires formelles de ces arbres dans un espace de distributions en écrivant $\mathbf{X}^\varepsilon(\circ\!\!\!

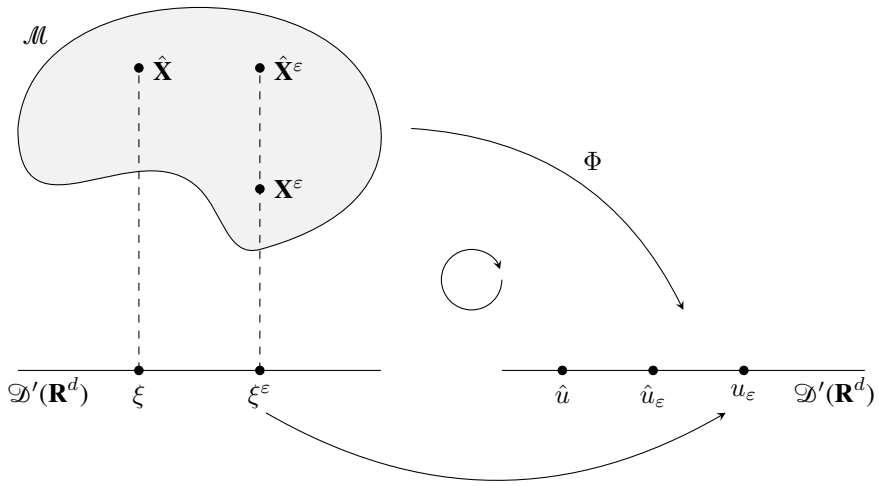


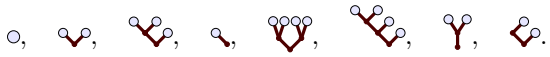
FIGURE 1 – Dans cette figure on voit la factorisation de l'application $\xi_\varepsilon \mapsto u_\varepsilon$ en $\xi_\varepsilon \mapsto \mathbf{X}^\varepsilon \mapsto \Phi(\mathbf{X}^\varepsilon) = u_\varepsilon$. On voit aussi que dans l'espace des modèles $\mathscr{M}$ il y a différents relèvements possibles de $\xi_\varepsilon \in \mathscr{D}'(\mathbf{R}^d)$, e.g. le modèle canonique $\mathbf{X}^\varepsilon$ et le modèle renormalisé $\hat{\mathbf{X}}^\varepsilon$; c'est ce dernier qui converge vers un modèle $\hat{\mathbf{X}}$, donnant ainsi un relèvement de ξ. On remarque $\hat{u}_\varepsilon = \Phi(\hat{\mathbf{X}}_\varepsilon)$ et $\hat{u} = \Phi(\hat{\mathbf{X}})$.

Le résultat final est une *solution renormalisée* $\hat{u} := \Phi(\hat{\mathbf{X}})$, qui est aussi l'unique solution d'un problème de point fixe. Cela marche pour des bruits très généraux, bien au-delà du cas Gaussien.

Un exemple : KPZ. Considérons la version régularisée de KPZ :

$$\partial_t u_\varepsilon = \partial_x^2 u_\varepsilon + (\partial_x u_\varepsilon)^2 + \xi_\varepsilon. \tag{5}$$

La liste des arbres représentant les composantes d'un modèle dans $\mathscr{M}$ est dans ce cas



(6)

La version renormalisée de l'équation est

$$\partial_t \hat{u}_\varepsilon = \partial_x^2 \hat{u}_\varepsilon + (\partial_x \hat{u}_\varepsilon)^2 - C_\varepsilon + \xi_\varepsilon, \qquad C_\varepsilon = \mathbf{E}\Big[(\partial_x G * \xi_\varepsilon)^2\Big] \sim \frac{1}{\varepsilon}. \tag{7}$$

Le premier article mathématique sur KPZ est [1], où la solution est construite par l'intermédiaire de la transformation de Hopf-Cole, c'est-à-dire la remarque simple que $z_\varepsilon := \exp(\hat{u}_\varepsilon)$ résout l'équation *linéaire*

$$\partial_t z_\varepsilon = \partial_x^2 z_\varepsilon + z_\varepsilon\,(\xi_\varepsilon - C_\varepsilon), \tag{8}$$

pour laquelle on peut montrer que z_ε converge quand $\varepsilon \to 0$ vers une fonction aléatoire z, solution de l'équation d'Itô

$$\partial_t z = \partial_x^2 z + z\,\xi.$$

On peut donc définir $\hat{u} := \log z$ (après avoir montré que $z > 0$ p.s.) ; évidemment, c'est $\hat{u}_\varepsilon = \log z_\varepsilon$, solution de (7), qui converge vers $\hat{u}$, et non pas u_ε.

Ce n'est pas avant [12] qu'une approche directe de (5)-(7) a été obtenue. La raison pour laquelle les mathématiciens n'ont pas réussi à résoudre cette équation pendant quinze ans est qu'il n'est pas facile de traiter la convergence de $(\partial_x \hat{u}_\varepsilon)^2 - C_\varepsilon$ lorsque $\varepsilon \to 0$. Grâce à la théorie RS, nous savons maintenant qu'il suffit de considérer la convergence en tant que distribution de la famille $\hat{\mathbf{X}}^\varepsilon(\tau)$ où τ varie dans la famille (6), par exemple

$$\hat{\mathbf{X}}^\varepsilon(\tau) = (\partial_x G * \xi_\varepsilon)^2 - \mathbf{E}[(\partial_x G * \xi_\varepsilon)^2] \tag{9}$$

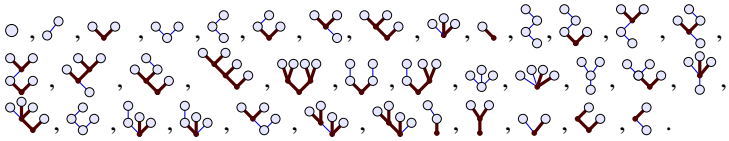
qui est la version renormalisée de $(\partial_x G * \xi_\varepsilon)^2$. La continuité de l'application Φ permet de conclure la convergence de $\hat{u}_\varepsilon := \Phi(\hat{\mathbf{X}}^\varepsilon)$.

A première vue on peut rester perplexe devant une telle *modification* d'une équation : a-t-on résolu le problème de départ (5) ou bien un problème différent comme (7) ? La réponse est que l'équation (5) n'a rien de canonique, car elle est censée être une approximation d'une équation sans régularisation ; il se peut donc que (5) ait besoin d'être ajustée quand $\varepsilon \to 0$ pour bien approcher l'objet limite. Dans ce sens, la transformation de Hopf-Cole montre que (7) n'est pas seulement la renormalisation de (5), mais plutôt la *bonne approximation* de l'équation KPZ limite.

EDPS à valeurs dans une variété. Une application récente de la théorie RS est la suivante : dans [3] les auteurs de cette note avec F. Gabriel ont construit une dynamique aléatoire sur l'espace des boucles dans une variété riemannienne, à l'aide d'une EDPS qui prend la forme

$$\partial_t u^\alpha = \partial_x^2 u^\alpha + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(u)\, \partial_x u^\beta \partial_x u^\gamma + \sum_{i=1}^m \sigma_i^\alpha(u)\, \xi_i \ , \tag{10}$$

voir la figure 2. La liste (presque) complète des arbres indexant les composantes d'un modèle dans $\mathscr{M}$ est dans ce cas



(11)

Dans [3], des quantités géométriques naturelles comme la courbure scalaire jouent un rôle important et fascinant dans l'étude de l'équation (10).

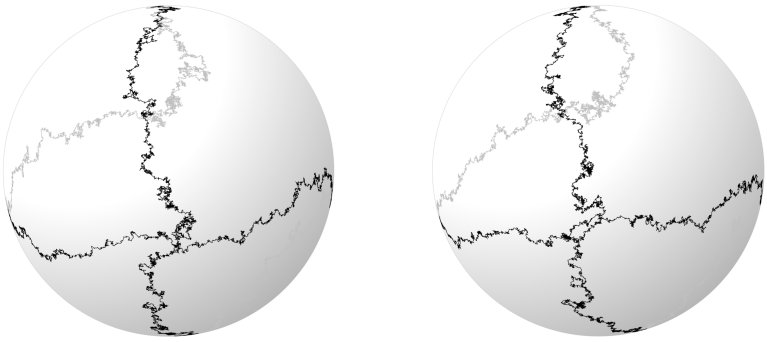


FIGURE 2 – La solution de (10) sur la sphère à deux instants proches.

La structure algébrique. On peut remarquer que les deux exemples de produits renormalisés que nous avons discutés dans (4)-(9) sont simplement donnés par la soustraction d'une constante. En général, la procédure de renormalisation (et donc la transformation de $\mathbf{X}^\varepsilon$ vers $\hat{\mathbf{X}}^\varepsilon$) est effectivement décrite dans [4] par une opération de *recentrage*. Cependant, ce recentrage peut être plus compliqué que la simple soustraction d'une constante, la raison étant que la soustraction d'une constante n'est pas forcément un élément du groupe $\mathcal{G}_-$ décrivant les transformations 'admissibles' de l'espace des modèles. On montre dans [4] que pour autant que la collection d'arbres générant $\mathcal{T}$ ait certaines propriétés naturelles dans ce contexte, il existe un unique élément (déterministe) $g_\varepsilon \in \mathcal{G}_-$ du groupe de renormalisation tel que si l'on pose $\hat{\mathbf{X}}^\varepsilon(\tau) = \mathbf{X}^\varepsilon(g_\varepsilon \tau)$, alors toutes les composantes de $\hat{\mathbf{X}}^\varepsilon$ sont d'espérance nulle.

Pour décrire le groupe de renormalisation $\mathcal{G}_-$, nous construisons une algèbre avec unité $(\mathcal{H}_-, \cdot, \mathbf{1}_-)$ engendrée par les arbres de type (6) ou (11) et nous réalisons $\mathcal{G}_-$ comme l'espace des *caractères* de $\mathcal{H}_-$, c'est-à-dire des morphismes d'algèbre $g : \mathcal{H}_- \to \mathbf{R}$. Pour décrire le produit de groupe dans $\mathcal{G}_-$, nous munissons $\mathcal{H}_-$ d'une structure de *cogèbre* (*coalgebra* en anglais) avec un *coproduit* $\Delta^- : \mathcal{H}_- \to \mathcal{H}_- \otimes \mathcal{H}_-$ qui satisfait une propriété de *coassociativité*

$$(\Delta^- \otimes \mathrm{id})\Delta^- = (\mathrm{id} \otimes \Delta^-)\Delta^- \tag{12}$$

et une *counité* $\eta_- \in \mathcal{H}_-^*$ telle que

$$(\eta_- \otimes \mathrm{id})\Delta^- = (\mathrm{id} \otimes \eta_-)\Delta^- = \mathrm{id} \tag{13}$$

sur $\mathcal{H}_-$. L'espace $(\mathcal{H}_-, \cdot, \mathbf{1}_-, \Delta^-, \eta_-)$ est une *algèbre de Hopf*. Le produit dans $\mathcal{G}_-$ est alors le dual du coproduit dans $\mathcal{H}_-$:

$$\mathcal{G}_- \times \mathcal{G}_- \ni (g_1, g_2) \mapsto g_1 \cdot g_2 \in \mathcal{G}_-, \qquad (g_1 \cdot g_2)(h) := (g_1 \otimes g_2)\Delta^- h$$

pour tout $h \in \mathcal{H}_-$. La coassociativité (12) de Δ^- implique que ce produit est *associatif* :

$$(g_1 \cdot g_2) \cdot g_3 = g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3),$$

et la counité η_- est l'élément neutre tel que $\eta_- \cdot g = g \cdot \eta_- = g$ pour tout $g \in \mathcal{G}_-$, grâce à (13). De plus, il est possible de montrer que tout élément de $\mathcal{G}_-$ possède bien un inverse.

Comme déjà mentionné en page 3, le groupe de renormalisation $\mathcal{G}_-$, qui agit sur l'espace des modèles $\mathcal{M}$, doit conserver une autre structure algébrique sous-jacente, décrite par un autre groupe que nous appelons $\mathcal{G}_+$ et qui permet de décrire la topologie de l'espace $\mathcal{M}$. Le fait que cette topologie est préservée par $\mathcal{G}_-$ est encodée dans une action de $\mathcal{G}_-$ sur $\mathcal{G}_+$, c'est-à-dire un morphisme de groupe de $\mathcal{G}_-$ dans les automorphismes de $\mathcal{G}_+$.

Similairement à la construction de $\mathcal{G}_-$ et $\mathcal{H}_-$, nous avons une algèbre de Hopf $(\mathcal{H}_+, \cdot, \mathbf{1}_+, \Delta^+, \eta_+)$ engendrée par une collection d'arbres de type (6) ou (11), et le groupe $\mathcal{G}_+$ est décrit comme l'espace des caractères de $\mathcal{H}_+$. L'action de $\mathcal{G}_-$ sur $\mathcal{G}_+$ est décrite par une application $\Delta^- : \mathcal{H}_+ \to \mathcal{H}_- \otimes \mathcal{H}_+$ qui satisfait une propriété dite de *cointeraction* :

$$\mathcal{M}^{(13)(2)(4)}(\Delta^- \otimes \Delta^-)\Delta^+ = (\mathrm{id} \otimes \Delta^+)\Delta^- \ , \tag{14}$$

où $\mathcal{M}^{(13)(2)(4)}(\tau_1 \otimes \tau_2 \otimes \tau_3 \otimes \tau_4) := (\tau_1 \cdot \tau_3 \otimes \tau_2 \otimes \tau_4)$.

Nous définissons maintenant l'action de $\mathcal{G}_-$ sur $\mathcal{G}_+$ comme cela : pour $g_- \in \mathcal{G}_-$ et $g_+ \in \mathcal{G}_+$, $g_- \bullet g_+ \in \mathcal{G}_+$ est donné par

$$(g_- \bullet g_+)(h_+) = (g_- \otimes g_+)\Delta^- h_+, \qquad \forall\, h_+ \in \mathcal{H}_+.$$

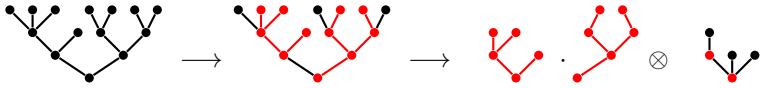
On peut voir facilement que la propriété de cointeraction (14) définit une action :

$$g_- \bullet (\bar{g}_- \bullet g_+) = (g_- \cdot \bar{g}_-) \bullet g_+, \qquad g_-, \bar{g}_- \in \mathscr{G}_-, \quad g_+ \in \mathscr{G}_+.$$

Nous avons vu qu'un modèle $\mathbf{X} \in \mathscr{M}$ définit une fonction linéaire $\mathbf{X} : \mathscr{H}_- \to \mathscr{D}'(\mathbf{R}^d)$. Si maintenant $\mathbf{X} \in \mathscr{M}$ est un modèle et $g \in \mathscr{G}_-$ est un élément du groupe de renormalisation, on peut définir un nouveau modèle $\mathbf{X}^g \in \mathscr{M}$ par

$$\mathbf{X}^g : \mathscr{H}_- \to \mathscr{D}'(\mathbf{R}^d), \qquad \mathbf{X}^g(\tau) := (g \otimes \mathbf{X})\Delta^- \tau. \tag{15}$$

Les espaces $\mathscr{H}_+$ et $\mathscr{H}_-$ sont réalisés comme espaces vectoriels engendrés par des objets combinatoires, des *arbres enracinés et décorés*, correspondant aux arbres dans (6) ou (11). Les coproduits Δ^- et Δ^+ de tels arbres sont tous les deux construits à l'aide d'une opération *d'extraction et de contraction* de sous-forêts :



où

— nous partons d'un arbre, sur la gauche
— au centre, nous sélectionnons une sous-forêt, coloriée en rouge
— à droite, la sous-forêt coloriée est *extraite* dans le terme à gauche du produit tensoriel, et *contractée* à droite.

La différence principale entre les opérations Δ^- et Δ^+ est dans la sélection des sous-forêts qui sont extraites : dans le cas de Δ^+ on extrait uniquement des 'sous-forêts' consistant en un seul arbre qui contient la racine de l'arbre de départ. De plus, les deux opérations interagissent différemment avec les décorations de ces arbres qui en particulier permettent d'associer à chaque arbre une notion de degré. L'opération Δ^- n'extrait alors que des sous-arbres de degré négatif alors que Δ^+ est tel que chaque 'tronc' touchant la racine de l'arbre restant après contraction détermine un sous-arbre de degré positif.

Les propriétés de coassociativité et cointeraction vues ci-dessus ont une interprétation naturelle en termes d'opérations combinatoires sur ces arbres et forêts. Notre construction généralise une approche à l'analyse numérique des équations différentielles ordinaires, appelée *intégration numérique géométrique*, qui a été initiée par J. Butcher [5] et ensuite développée notamment par E. Hairer et ses collaborateurs [9]. L'espace $(\mathscr{H}_+, \cdot, \mathbf{1}_+, \Delta^+, \eta_+)$ est aussi une généralisation de l'algèbre dite de *Connes-Kreimer* qui a été introduite dans les années 90 pour décrire algébriquement la renormalisation dans la théorie quantique des champs [6]. Une synthèse de cette structure algébrique dans des contextes variés est réalisée dans [7].

Références

[1] L. Bertini, G. Giacomin (1997), *Stochastic Burgers and KPZ equations from particle systems*. Comm. Math. Phys. 183, no. 3, 571–607.

[2] Y. Bruned, A. Chandra, I. Chevyrev, M. Hairer (2017), *Renormalising SPDEs in regularity structures*, arXiv :1711.10239.

[3] Y. Bruned, F. Gabriel, M. Hairer, L. Zambotti (2019), *Geometric stochastic heat equations*, arXiv :1902.02884.

[4] Y. Bruned, M. Hairer, L. Zambotti (2019), *Algebraic renormalisation of regularity structures*, Invent. Math.

[5] J.C. Butcher, (1972), *An algebraic theory of integration methods*, Mathematics of Computation, **26**, 79–106.

[6] A. Connes and D. Kreimer. *Hopf algebras, renormalization and noncommutative geometry*. Comm. Math. Phys. **199**, no. 1, (1998), 203–242.

[7] D. Calaque, K. Ebrahimi-Fard, and D. Manchon. Two interacting Hopf algebras of trees : a Hopf-algebraic approach to composition and substitution of B-series. *Adv. in Appl. Math.* **47**, no. 2, (2011), 282–308.

[8] A. Chandra, M. Hairer (2016), *An analytic BPHZ theorem for regulariy structures*, arXiv :1612.08138.

[9] P. Chartier, E. Hairer, and G. Vilmart. Algebraic structures of B-series. *Found. Comput. Math.* **10**, no. 4, (2010), 407–427.

[10] M. Gubinelli (2004), *Controlling rough paths*. J. Funct. Anal. 216, no. 1, 86–140.

[11] M. Gubinelli (2010), *Ramification of rough paths*. J. Differential Equations 248, no. 4, 693–721.

[12] M. Hairer, *Solving the KPZ equation*. Ann. of Math. (2) 178 (2013), no. 2, 559–664.

[13] M. Hairer (2014), *A theory of regularity structures*. Invent. Math. 198, no. 2, 269–504.

[14] T.J. Lyons (1998), *Differential equations driven by rough signals*. Rev. Mat. Iberoamericana 14, no. 2, 215–310.