Fonction de partition et groupe de Heisenberg

Yves Benoist

Abstract

La fonction de partition est une fonction classique étudiée dès le 19ème siècle. On peut la voir comme un potentiel sur le groupe de Heisenberg. Ce nouveau point de vue est à la base de la compréhension des fonctions harmoniques sur ce groupe.

La fonction de partition $p(x, y, z)$ est définie, pour x, y, z entiers, comme le nombre de décompositions de z comme une somme d'entiers

$$z = n_1 + \cdots + n_y \quad \text{avec} \quad x \geq n_1 \geq \cdots \geq n_y \geq 0\,.$$

Une telle décomposition est appelée une *partition* de z. Par convention, on pose $p(x, y, z) = 0$ quand x, y ou z est strictement négatif. Cette fonction de partition est non nulle pour $x \geq 0$, $y \geq 0$, $xy \geq z \geq 0$, et satisfait les égalités

$$p(x, y, z) = p(y, x, z) = p(x, y, xy - z).$$

Ces égalités sont un joli exercice que nous laissons au lecteur. Cette fonction a été étudiée depuis près de deux cents ans. Ainsi, Cayley et Sylvester ont montré dans les années 1850 que la suite

$z \mapsto p(x, y, z)$ *est croissante pour* $z \leq xy/2$ *et décroissante pour* $z \geq xy/2$.

Ce fait semble très élémentaire mais, 170 ans plus tard, il n'en existe toujours pas de preuve purement combinatoire.

La fonction de partition satisfait aussi l'égalité fonctionnelle,

$$p(x, y, z) = p(x-1, y, z-y) + p(x, y-1, z), \tag{1}$$

pour tout $(x, y, z) \neq 0$. On vérifie cette égalité en distinguant selon la couleur de la case en bas à gauche du rectangle comme dans la figure 1.

Le groupe de Heisenberg $G = H_3(\mathbb{Z})$ est l'ensemble des triplets d'entiers $g = (x, y, z)$ muni de la loi de groupe

$$(x_0, y_0, z_0)\,(x, y, z) = (x_0 + x, y_0 + y, z_0 + z + x_0 y)\,.$$

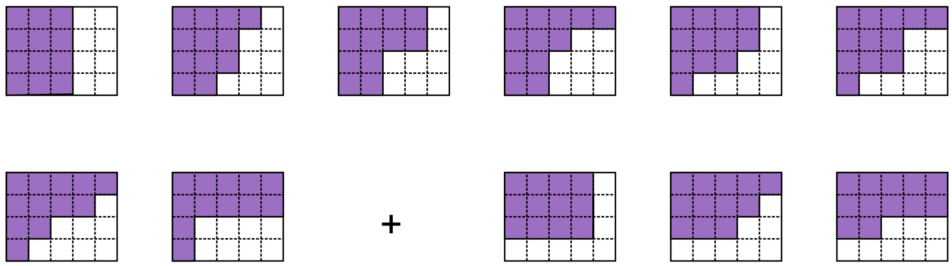

Figure 1: L'égalité $p(5,4,12) = p(4,4,8) + p(5,3,12)$, c'est-à-dire $11 = 8 + 3$.

Soit $S \subset G$ une partie finie pondérée. C'est-à-dire que tout élément s de S a une masse $\mu_s > 0$. Pour une fonction $h(x,y,z)$ sur G on introduit la "somme pondérée des translatés à gauche"

$$Ph(g) = \sum_{s\in S} \mu_s \, h(s^{-1}g).$$

Choisissons $S = \{a, b\}$ avec $a = (1,0,0)$ et $b = (0,1,0)$ de poids 1. L'égalité fonctionnelle (1) dit que, hors du point 0, la fonction $h = p$ vérifie $h = Ph$.

Le potentiel en 0 de cet *opérateur de Markov* P n'est autre que la fonction de partition p. C'est-à-dire qu'on a l'égalité

$$p = \sum_{n=0}^{\infty} P^n \mathbf{1}_{\{0\}} \, ,$$

où $\mathbf{1}_{\{0\}}$ est la fonction indicatrice en 0. En effet, comme le montre la figure 2, l'entier $p(g)$ est le nombre de façons d'écrire g comme un mot en a et b.

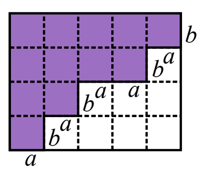

Figure 2: La partition $12 = 5+4+2+1$ associée au mot *ababaabab* donne l'élément $g = ababaabab = (5,4,12)$ de G.

Les fonctions P-harmoniques sur G sont les fonctions h sur G qui vérifient $h = Ph$, c'est-à-dire, pour notre exemple $S = \{a, b\}$,

$$h(x,y,z) = h(x-1, y, z-y) + h(x, y-1, z). \tag{2}$$

Nous voulons décrire les fonctions P-harmoniques positives[1] sur G, c'est-à-dire, les solutions positives de cette famille infinie d'équations linéaires (2). Par un théorème très général de Choquet , il suffit de décrire les fonctions P-harmoniques positives extrémales, c'est-à-dire celles qui ne sont pas une somme de deux fonctions P-harmoniques positives non proportionnelles.

Quand h ne dépend pas de z, on peut prendre pour h un caractère

$$h(x,y,z) = r^x s^y \quad \text{avec } r, s > 0 \text{ et } \quad 1/r + 1/s = 1.$$

Quand h ne dépend pas de x, on peut prendre pour h la fonction de partition dans un rectangle très large,

$$h(x,y,z) = p_\infty(y,z) := p(z,y,z).$$

	↑ z									
0	**0**	1	5	10	15	18	20	21	22	
0	**0**	1	4	8	11	13	14	15	15	
0	**0**	1	4	7	9	10	11	11	11	
0	**0**	1	3	5	6	7	7	7	7	
0	**0**	1	3	4	5	5	5	5	5	
0	**0**	1	2	3	3	3	3	3	3	
0	**0**	1	2	2	2	2	2	2	2	
0	**0**	1	1	1	1	1	1	1	1	
0	1	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	→ y
0	**0**	0	0	0	0	0	0	0	0	

Figure 3: La fonction p_∞ vérifie $p_\infty(y,z) = p_\infty(y, z-y) + p_\infty(y-1, z)$.
La diagonale rouge est la fonction de partition étudiée par Hardy et Ramanujan.

Le théorème suivant décrit les fonctions P-harmoniques positives.

Théorème. *Une fonction P-harmonique positive extrémale sur G est*
soit un caractère $h(x,y,z) = r^x s^y$,
soit une fonction de partition $h(x,y,z) := p_\infty(y,z)$,
soit une symétrique de cette fonction de partition $h(x,y,z) := p_\infty(x, xy-z)$,
ou encore un translaté à droite d'un multiple d'une de ces fonctions.

Ce théorème s'étend à toutes les parties pondérées finies S du groupe de Heisenberg G.

[1] Les fonctions P-harmoniques positives ont été décrites par Choquet et Deny sur les groupes abéliens dans les années 1950, par Margulis sur les groupes nilpotents quand S engendre G comme semigroupe dans les années 1960, et par Ancona sur les groupes hyperboliques dans les années 1980.