COURBES DE BERKOVICH ET DÉFINISSABILITÉ

par

Pablo Cubides Kovacsics & Jérôme Poineau

Résumé. — Depuis la fondation de la géométrie rigide par J. Tate dans les années 1960, la géométrie analytique sur un corps ultramétrique tel que $\mathbb{Q}_p$ a beaucoup évolué. Différentes théories ont vu le jour, dont celle développée par V. Berkovich, dans laquelle reste valable une large partie de l'intuition héritée de l'analyse complexe. Récemment, E. Hrushovski et F. Loeser ont introduit une nouvelle approche basée sur des techniques de théorie des modèles. Dans le cas particulier des courbes, les espaces qu'ils construisent admettent une structure définissable. Dans ce texte, après une courte introduction au sujet, nous proposons une construction explicite de la structure définissable des courbes, ainsi que quelques applications.

Table des matières

1. Introduction 1
2. Courbes k-analytiques 3
3. Courbes analytiques et définissabilité 8
4. Ensembles radiaux et applications 10
Références 11

1. Introduction

Un corps ultramétrique est la donnée d'un corps k muni d'une valeur absolue $|\cdot|\colon k \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ vérifiant l'inégalité triangulaire ultramétrique : pour tous $x, y \in k$,

$$|x+y| \leqslant \max\{|x|, |y|\}.$$

Donnons un exemple classique. Pour chaque nombre premier p, on peut munir $\mathbb{Q}$ de la *valeur absolue p-adique* $|\cdot|_p$ définie comme suit : $|0|_p = 0$ et

$$\Big| p^n \, \frac{a}{b} \Big|_p = p^{-n},$$

pour $n, a, b \in \mathbb{Z}$ avec a et b premiers à p.

Les corps de séries formelles fournissent un second exemple. Étant donné un corps K, on munit le corps de séries formelles à coefficients dans K, noté $k = K(\!(t)\!)$, de la *valeur absolue t-adique* $|\cdot|$ définie comme suit : $|0| = 0$ et

$$\Big| \sum_{i \geqslant i_0} a_i \, t^i \Big| = 2^{-i_0},$$

Les auteurs ont bénéficié du soutien du projet Starting Grant « TOSSIBERG »637027 de l'ERC..

lorsque $a_{i_0} \neq 0$. On laisse le lecteur se convaincre qu'il s'agit dans les deux cas de corps ultramétriques.

De la même façon que l'on obtient le corps des nombres réels comme le complété de $\mathbb{Q}$ pour la valeur absolue usuelle, on définit le *corps des nombres p-adiques* $\mathbb{Q}_p$ comme le complété de $\mathbb{Q}$ par rapport a la valeur absolue p-adique. Par construction, il s'agit d'un corps ultramétrique complet.

Signalons une différence fondamentale entre ces deux cadres. Le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$, qui est une clôture algébrique de $\mathbb{R}$, est un corps complet. Cette propriété tombe en défaut pour $\mathbb{Q}_p$. Notons $\mathbb{Q}_p^{\mathrm{alg}}$ une clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$. On vérifie que la valeur absolue p-adique $|\cdot|_p$ s'étend de façon unique au corps $\mathbb{Q}_p^{\mathrm{alg}}$, mais que ce dernier n'est pas complet. En revanche, le complété de $\mathbb{Q}_p^{\mathrm{alg}}$ reste algébriquement clos. Ce complété, que nous noterons $\mathbb{C}_p$, est donc un corps ultramétrique complet algébriquement clos, qui peut être vu comme un analogue p-adique de $\mathbb{C}$.

Il est naturel de se demander s'il existe un analogue p-adique de la géométrie analytique complexe, dans lequel le corps $\mathbb{C}_p$ jouerait le rôle du corps $\mathbb{C}$.

Malheureusement, la topologie sur $\mathbb{C}_p$ induite par la valeur absolue p-adique est loin de posséder les bonnes propriétés de la topologie complexe. Considérons par exemple un disque fermé

$$D(a,r) = \{x \in k : |x-a| \leqslant r\},$$

avec $a \in \mathbb{C}_p$ et $r \in \mathbb{R}_{>0}$. Il découle immédiatement de l'inégalité ultramétrique que, pour tout $b \in D(a,r)$, le disque ouvert $D^-(b,r)$ est contenu dans le disque fermé $D(a,r)$.[1] On en déduit que le disque fermé $D(a,r)$ est ouvert pour la topologique p-adique.

En poussant plus loin ce raisonnement, on montre que les composantes connexes de $\mathbb{C}_p$ sont réduites à des points : on dit que l'espace est *totalement discontinu*. Cette propriété semble rendre vaine toute tentative de démontrer un principe du prolongement analytique qui soit digne d'intérêt, et sonner ainsi le glas de la géométrie analytique p-adique, ou au moins d'une géométrie analytique p-adique qui serait un décalque de son analogue complexe.

Néanmoins, différentes approches, sophistiquées, ont été proposées pour surmonter ces obstacles topologiques et formuler une théorie des espaces analytiques sur des corps ultramétriques complets tels que $\mathbb{C}_p$. On peut citer les travaux de J. Tate, M. Raynaud, V. Berkovich ou R. Huber. C'est le point de vue de V. Berkovich que nous adopterons ici. De tous, c'est celui qui reste le plus proche de la géométrie analytique complexe, notamment en ce qui concerne les propriétés topologiques. Ceci est rendu possible par l'ajout de nombreux points.

La théorie de Berkovich permet de définir une notion générale d'espace. Les analogues des propriétés usuelles sont bien définies dans ce cadre et se comportent comme attendu. Par exemple, la notion de courbe analytique lisse sur k fait sens et l'analytifiée d'une courbe algébrique X lisse sur k est une courbe analytique lisse sur k. Cette dernière sera notée X^{an}.

E. Hrushovski et F. Loeser ont proposé dans [**5**] une version des espaces de Berkovich dans un cadre différent, celui de la théorie des modèles. Ils démontrent, en particulier, que l'analytifiée d'une courbe algébrique peut être munie une certaine structure, dite *définissable*.[2] Informellement, cela signifie que l'on peut décrire ces courbes avec des formules de la logique du premier ordre dans un langage naturel (contenant les opérations de corps ainsi que la valeur absolue). Néanmoins, la preuve d'E. Hrushovski et F. Loeser n'est pas constructive.

L'un des buts de notre travail est de fournir une description explicite de la structure définissable des courbes. En outre, notre construction s'applique à d'autres classes de courbes analytiques (et de morphismes) qui ne rentrent pas dans le cadre essentiellement algébrique traité par E. Hrushovski et

1. Profitons-en pour mentionner une autre propriété étonnante que nous utiliserons plus loin : on a l'égalité $D(b,r) = D(a,r)$.

2. La théorie d'E. Hrushovski et F. Loeser permet également de traiter des espaces quasi-projectifs de dimension arbitraire, mais leur structure est plus compliquée.

F. Loeser. Dans ce texte, nous restreindrons la présentation aux courbes algébriques. Dans ce cadre, le résultat montre que des telles courbes admettent une structure définissable dans un langage de nature algébrique. Ceci formalise l'intuition que cette sous-catégorie est bien plus simple que la catégorie entière des courbes analytiques. De plus, le fait d'avoir une structure définissable explicite permet de montrer que certains sous-ensembles naturels d'une telle courbe sont des sous-ensembles définissables (c'est-à-dire donnés par une certaine formule du langage choisi) et, en conséquence, qu'ils admettent une description assez simple.

Le texte est organisé comme suit. Dans la section 2, nous introduisons la droite affine analytique de Berkovich $\mathbb{A}_k^{1,\mathrm{an}}$ sur un corps ultramétrique complet k et nous expliquons comment, à partir de cette droite, il est possible de donner une description de toutes les courbes k-analytiques lisses. Dans la section 3, après quelques rappels sur les ensembles définissables, nous expliquons dans les grandes lignes quelle est la structure définissable que l'on associe à l'analytifiée d'une courbe algébrique. Finalement, dans la section 4, nous fournissons une description des sous-ensembles définissables d'une telle courbe et présentons une application.

Nous fixons maintenant, et pour tout la suite de ce texte, un corps ultramétrique complet $(k, |\cdot|)$. Pour simplifier la présentation, nous supposerons que k est algébriquement clos (même si la théorie des espaces de Berkovich peut être développée sans cette restriction).

Avant de poursuivre, introduisons quelques notations. Le disque unité fermé $k^\circ := D(0,1)$ et le disque ouvert unité $k^{\circ\circ} := D^-(0,1)$ jouent un rôle essentiel dans l'étude de k. L'inégalité triangulaire ultramétrique assure que k°, est un anneau local, appelé *anneau de valuation*, d'idéal maximal $k^{\circ\circ}$. Le quotient $\tilde{k} := k^\circ/k^{\circ\circ}$ est un corps, appelé *corps résiduel*. L'image $|k^*|$ de k^* par l'application $|\cdot|$ est un sous-groupe de $\mathbb{R}_{>0}$ appelé *groupe de valeurs*.

Reprenons les exemples du début du texte. Si $k = \mathbb{Q}_p$, on trouve $\tilde{k} = \mathbb{F}_p$ (le corps fini à p éléments) et $|k^*| = \{p^n : n \in \mathbb{Z}\}$. Si $k = K(\!(t)\!)$, on trouve $\tilde{k} = K$ et $|k^*| = \{t^n : n \in \mathbb{Z}\}$. Si $k = \mathbb{C}_p$, on trouve $\tilde{k} = \mathbb{F}_p^{\mathrm{alg}}$ (une clôture algébrique de $\mathbb{F}_p$) et $|k^*| = \{p^q : q \in \mathbb{Q}\}$.

2. Courbes k-analytiques

2.1. La droite de Berkovich. — Comme on l'a mentionné dans l'introduction, afin de résoudre les problèmes posés par la topologie de k, V. Berkovich définit des espaces contenant plus de points que ceux attendus. Il définit ainsi la *droite analytique sur* k, notée $\mathbb{A}_k^{1,\mathrm{an}}$, comme l'ensemble des semi-normes multiplicatives

$$|\cdot|_x \colon k[T] \longrightarrow \mathbb{R}_{\geqslant 0}$$

qui induisent la valeur absolue $|\cdot|$ sur k.

Remarquons que l'on peut naturellement associer à chaque élément a de k un point de $\mathbb{A}_k^{1,\mathrm{an}}$: celui associé à la semi-norme multiplicative

$$|\cdot|_a \colon P \in k[T] \longmapsto |P(a)| \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}.$$

Cet exemple fournit *a posteriori* une motivation pour la définition de Berkovich. Son point de vue revient à affirmer que ce dont nous avons véritablement besoin en géométrie analytique, c'est de connaître la valeur absolue d'une fonction en un point, et il définit donc $\mathbb{A}_k^{1,\mathrm{an}}$ comme l'ensemble des applications possédant les mêmes propriétés que la composée d'une évaluation et d'une valeur absolue.

L'ensemble $\mathbb{A}_k^{1,\mathrm{an}}$ est également muni d'une topologie et d'un faisceau de fonctions analytiques. La topologie est définie comme la topologie la plus grossière vérifiant la propriété suivante : pour tout $P \in k[T]$, l'application « valeur absolue de P »

$$|P| \colon |\cdot|_x \in \mathbb{A}_k^{1,\mathrm{an}} \longmapsto |P|_x \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$$

est continue. Munie de cette topologie, V. Berkovich montre que la droite affine analytique $\mathbb{A}_k^{1,\mathrm{an}}$ est un espace localement compact, connexe par arcs et localement connexe par arcs. Quelle différence avec la topologie de k, qui est totalement discontinue !

Dans un souci de complétude, et pour conclure les définitions, indiquons que V. Berkovich appelle *fonction analytique* sur un ouvert de $\mathbb{A}_k^{1,\mathrm{an}}$ toute fonction qui est localement limite uniforme de fractions rationnelles sans pôles. Nous ne nous attarderons pas sur ce point.

Nous avons déjà observé que les points de k fournissent des points de $\mathbb{A}_k^{1,\mathrm{an}}$, mais il en existe bien d'autres. À un couple (a,r) de $k \times \mathbb{R}_{\geqslant 0}$, on peut ainsi associer la semi-norme multiplicative

$$|\cdot|_{a,r} \colon \sum_{i \geqslant 0} c_i (T-a)^i \in k[T] \longmapsto \max_{i \geqslant 0}(|c_i| r^i) \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}.$$

Remarquons que l'on a $|\cdot|_{a,0} = |\cdot|_a$. Le point de $\mathbb{A}_k^{1,\mathrm{an}}$ correspondant à $|\cdot|_{a,r}$ est souvent noté $\eta_{a,r}$. Il se comporte comme une sorte de point générique du disque fermé $\overline{D}(a,r)$. Il est remarquable qu'il ne dépend d'ailleurs que de ce disque. Or, nous avons remarqué plus haut que, dans le monde ultramétrique, « tout point d'un disque est au centre ». Par exemple, les disques $\overline{D}(0,1)$ et $\overline{D}(1,1)$ coïncident et il en va donc de même des points $\eta_{0,1}$ et $\eta_{1,1}$.

C'est de cette remarque que découle la connexité par arcs de la droite de Berkovich $\mathbb{A}_k^{1,\mathrm{an}}$. À titre d'exemple, l'application

$$\begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{A}_k^{1,\mathrm{an}} \\ t & \longmapsto & \begin{cases} \eta_{0,2t} & \text{si } t \in [0,1/2] \\ \eta_{1,2-2t} & \text{si } t \in [1/2,1] \end{cases} \end{array}$$

définit un chemin reliant les points 0 et 1 de k. Notons que les seuls points de k qu'il contient sont ses extrémités.

En généralisant la construction précédente, on se convainc que l'ensemble des points $\eta_{a,r}$ possède une structure d'arbre réel. Ce résultat vaut encore pour la droite de Berkovich $\mathbb{A}_k^{1,\mathrm{an}}$ tout entière.

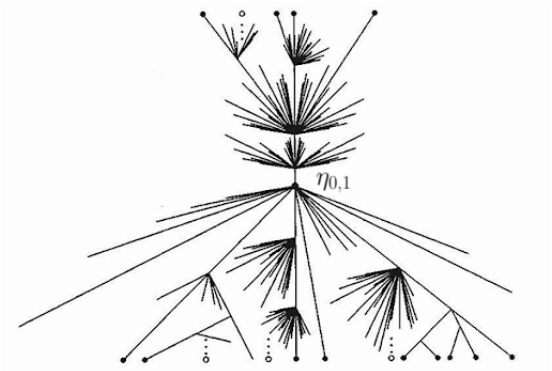

FIGURE 1. La droite de Berkovich $\mathbb{A}_k^{1,\mathrm{an}}$ (à partir d'une illustration de Joe Silverman).

On classe les points de la droite de Berkovich $\mathbb{A}_k^{1,\mathrm{an}}$ en 4 types. Les points de *type 1* sont ceux de la forme $\eta_{a,0}$ pour $a \in k$. Ils se situent au bout de certaines branches de l'arbre et sont marqués $\bullet$ sur la figure 1. L'ensemble de ces points est en bijection avec k. Les points de *type 2* sont ceux de la forme $\eta_{a,r}$ pour $a \in k$ et $r \in |k^*|$. Ils correspondent aux points de branchement sur la figure 1. Les points de *type 3* sont ceux de la forme $\eta_{a,r}$ pour $a \in k$ et $r \in \mathbb{R}_{>0} \setminus |k^*|$. Ils correspondent aux points intérieurs de l'arbre qui ne sont pas des points de branchement sur la figure 1. La droite $\mathbb{A}_k^{1,\mathrm{an}}$ contient d'autres points que ceux de la forme $\eta_{a,r}$. Ils sont dits de *type 4* et se situent au bout de certaines branches de l'arbre. Ils sont marqués $\circ$ sur la figure 1.

2.2. Deux exemples classiques. —

2.2.1. *Un disque.* — Considérons le disque unité fermé au sens de Berkovich :

$$\overline{\mathbb{D}}(0,1) \coloneqq \{x \in \mathbb{A}_k^{1,\mathrm{an}} : |T|_x \leqslant 1\}.$$

Les points de la forme $\eta_{a,r}$ qui s'y trouvent sont ceux pour lesquels on a $a \in k^\circ$ et $r \leqslant 1$.

Le disque fermé $\overline{\mathbb{D}}(0,1)$ contient des disques ouverts de rayon 1 : tous ceux de la forme

$$\mathbb{D}(a,1) \coloneqq \{x \in \mathbb{A}_k^{1,\mathrm{an}} : |T-a|_x < 1\},$$

avec $a \in k^\circ$. Il suit de l'inégalité triangulaire ultramétrique que deux tels disques ouverts $\mathbb{D}(a,1)$ et $\mathbb{D}(a',1)$ coïncident exactement lorsque $|a-a'| < 1$. Les disques ouverts de rayon 1 contenus dans $\overline{\mathbb{D}}(0,1)$ sont donc paramétrés par le corps résiduel $\tilde{k}$ de k.

Puisque, pour tout $a \in k^\circ$, on a $\eta_{a,1} = \eta_{0,1}$, le complémentaire dans $\overline{\mathbb{D}}(0,1)$ de la réunion de ces disques ouverts est réduit au seul point $\eta_{0,1}$. Ce point est le bord topologique de $\overline{\mathbb{D}}(0,1)$ dans $\mathbb{A}_k^{1,\mathrm{an}}$. On montre également que le disque fermé $\overline{\mathbb{D}}(0,1)$ se rétracte par déformation sur le point $\eta_{0,1}$.

2.2.2. *Une couronne.* — Soient $r, s \in \mathbb{R}_{>0}$ avec $r < s$. Considérons la couronne

$$\mathbb{C}(0,r,s) \coloneqq \{x \in \mathbb{A}_k^{1,\mathrm{an}} : r < |T|_x < s\}.$$

Elle contient un intervalle distingué :

$$I_{r,s} \coloneqq \{\eta_{0,t} : t \in \,]r,s[\},$$

appelé *squelette* de la couronne. Comme dans le cas du disque, $\mathbb{C}(0,r,s) \setminus I_{r,s}$ est réunion de disques ouverts : ceux de la forme $\mathbb{D}(a,|a|)$ pour $a \in k$ tel que $|a| \in \,]r,s[$. De plus, $\mathbb{C}(0,r,s)$ se rétracte naturellement par déformation sur $I_{r,s}$.

2.3. Un exemple plus compliqué. — Pour terminer cette section, nous souhaitons présenter un exemple de partie de $\mathbb{A}_k^{1,\mathrm{an}}$ plus compliqué, tout en restant naturel.

Une source très riche de telles parties se présente comme suit. Soit $P \in k[T]$ un polynôme non constant et considérons le morphisme $\varphi\colon \mathbb{A}_k^{1,\mathrm{an}} \to \mathbb{A}_k^{1,\mathrm{an}}$ associé. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on peut alors considérer le lieu où le cardinal des fibres de φ est égal à n :

$$N_n \coloneqq \{x \in \mathbb{A}_k^{1,\mathrm{an}} : \sharp\varphi^{-1}(x) = n\}.$$

Pour obtenir un exemple non trivial, plaçons-nous dans le cadre où $k = \mathbb{C}_p$ et $P = T^p$.

Calculons d'abord la préimage du point $\eta_{0,r}$ avec $r \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$. Elle est reliée à la préimage du disque fermé $\overline{\mathbb{D}}(0,r)$:

$$\begin{aligned}\varphi^{-1}(\overline{\mathbb{D}}(0,r)) &= \varphi^{-1}(\{x \in \mathbb{A}_k^{1,\mathrm{an}} : |T|_x \leqslant r\}) \\ &= \{x \in \mathbb{A}_k^{1,\mathrm{an}} : |T^p|_x \leqslant r\} \\ &= \overline{\mathbb{D}}(0, r^{1/p}).\end{aligned}$$

On en déduit que $\varphi^{-1}(\eta_{0,r}) = \{\eta_{0,r^{1/p}}\}$ et, en particulier, que $\sharp\varphi^{-1}(\eta_{0,r}) = 1$.

Calculons maintenant la préimage du point $\eta_{1,r}$ avec $r \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$. Pour $r = 0$, on a

$$\varphi^{-1}(1) = \{x \in \mathbb{C}_p : x^p = 1\} = \{1, \zeta, \zeta^2, \ldots, \zeta^{p-1}\},$$

où ζ est une racine primitive $p^{\text{ème}}$ de l'unité dans $\mathbb{C}_p$. En particulier, on a $\sharp\varphi^{-1}(1) = p$.

Un résultat classique assure que l'on a $|1-\zeta| = p^{-1/(p-1)}$ et, plus généralement, pour tous $i, j \in \{0, \ldots, p-1\}$ avec $i \neq j$, $|\zeta^i - \zeta^j| = p^{-1/(p-1)}$. Posons $\varpi \coloneqq p^{-1/(p-1)}$.

Calculons maintenant la préimage du disque fermé $\overline{\mathbb{D}}(1,r)$:

$$\begin{aligned}\varphi^{-1}(\overline{\mathbb{D}}(1,r)) &= \varphi^{-1}(\{x \in \mathbb{A}_k^{1,\mathrm{an}} : |T-1|_x \leqslant r\}) \\ &= \{x \in \mathbb{A}_k^{1,\mathrm{an}} : |T^p-1|_x \leqslant r\} \\ &= \{x \in \mathbb{A}_k^{1,\mathrm{an}} : |T-1|_x\,|T-\zeta|_x \cdots |T-\zeta^{p-1}|_x \leqslant r\}.\end{aligned}$$

Cette préimage est donc une réunion de disques centrés en les points $1, \zeta, \ldots, \zeta^{p-1}$.

Soit $x \in \mathbb{A}_k^{1,\mathrm{an}}$ tel que $|T-1|_x \leqslant 1$. Si $|T-1|_x < \varpi$, alors, pour tout $i \in \{1,\ldots,p-1\}$, on a $|T-\zeta^i|_x = \varpi$ et donc

$$|T^p-1|_x = |T-1|_x\,\varpi^{p-1}.$$

Si $|T-1|_x > \varpi$, alors, pour tout $i \in \{1,\ldots,p-1\}$, on a $|T-\zeta^i|_x = |T-1|_x$ et donc

$$|T^p-1|_x = |T-1|_x^p.$$

Ces calculs valent encore en remplaçant 1 par toute autre racine $p^{\text{ème}}$ de l'unité.

On en déduit le résultat suivant. Pour tout $r \in [0,1]$, on a

$$\varphi^{-1}(\eta_{1,r}) = \begin{cases} \{\eta_{1,r/\varpi^{p-1}}, \ldots, \eta_{\zeta^{p-1},r/\varpi^{p-1}}\} & \text{si } r < \varpi^p\ ; \\ \{\eta_{1,r^{1/p}}\} = \cdots = \{\eta_{\zeta^{p-1},r^{1/p}}\} & \text{si } r \geqslant \varpi^p. \end{cases}$$

En particulier, on a

$$\sharp\varphi^{-1}(\eta_{1,r}) = \begin{cases} p & \text{si } r < \varpi^p\ ; \\ 1 & \text{si } r \geqslant \varpi^p. \end{cases}$$

Les calculs s'adaptent facilement au cas d'autres points $\eta_{a,r}$. On en déduit une description explicite de l'ensemble N_1 :

$$\eta_{a,r} \in N_1 \Longleftrightarrow r \geqslant |a|\,\varpi^p.$$

Cet ensemble est représenté en gras sur la figure 2. On constate que l'ensemble N_1 est très différent des disques et des couronnes présentés plus haut. Il est naturellement défini par une condition que l'on peut qualifier de métrique.

2.4. Les courbes de Berkovich. — La théorie développée par V. Berkovich n'est pas confinée au cas de la droite. La définition énoncée au début de la section 2.1 s'adapte au cas de plusieurs variables de façon à fournir, pour tout entier n, un espace affine analytique de dimension n sur k, noté $\mathbb{A}_k^{n,\mathrm{an}}$. En prenant des fermés analytiques d'ouverts de tels espaces et en les recollant, on obtient une notion générale d'espace analytique sur k. [3]

Mettons en garde le lecteur sur le fait que, contrairement au cadre analytique complexe, une courbe analytique lisse sur k n'est pas toujours localement isomorphe à un ouvert de $\mathbb{A}_k^{1,\mathrm{an}}$. On peut donner une explication de ce fait en revenant à l'exemple du disque considéré plus haut. Dans ce cas, on a montré que les disques ouverts qu'il contient sont paramétrés par $\tilde{k}$, autrement dit, l'ensemble des $\tilde{k}$-points de la droite affine $\mathbb{A}_{\tilde{k}}^1$. Dans le cas d'une courbe arbitraire, on peut trouver un paramétrage par les $\tilde{k}$-points d'une courbe algébrique sur $\tilde{k}$ de genre strictement positif, ce qui montre que la situation locale est différente de celle de $\mathbb{A}_k^{1,\mathrm{an}}$.

Il est cependant possible de montrer qu'une courbe analytique lisse sur k est presque partout localement isomorphe à $\mathbb{A}_k^{1,\mathrm{an}}$. Il existe même des résultats de structure plus précis.

3. La définition proposée par V. Berkovich est en réalité encore plus générale. On y recolle des « espaces affinoïdes », qui sont des fermés analytiques de disques *fermés*.

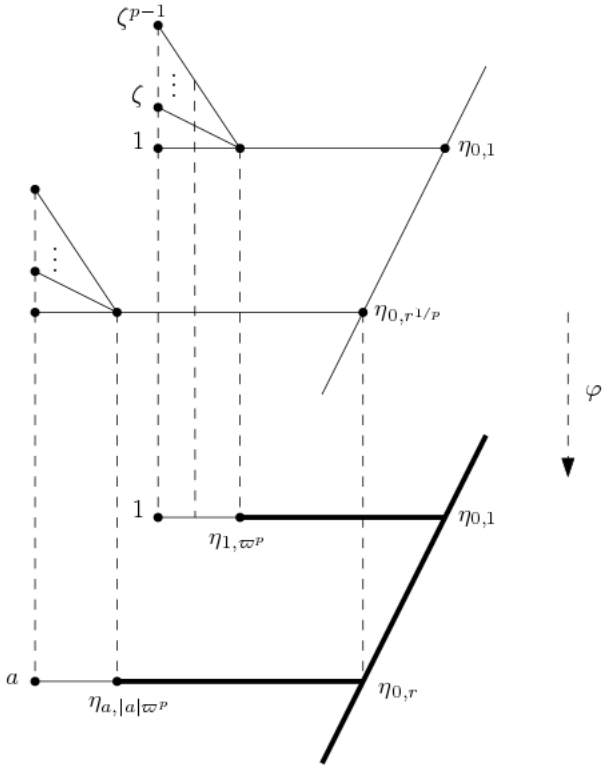

FIGURE 2. Le morphisme φ est représenté vers le bas avec par des lignes pointillées. La partie en gras de l'espace du bas correspond à N_1, c'est-à-dire aux points ayant un seul antécédent par φ. Les autres points (dans les intervalles $[1, \eta_{1,\varpi^p}[$ et $[a, \eta_{a,|a|\varpi^p}[$ sur la figure) sont contenus dans N_p : ils ont p antécédents par φ.

2.1. Théorème. — *Soit X une courbe analytique lisse sur k. Il existe un ensemble localement fini S de points X, un ensemble localement fini $\mathcal{C}$ de couronnes ouvertes de X et un ensemble $\mathcal{D}$ de disques ouverts de X tels que*

$$X = S \sqcup \bigsqcup_{C \in \mathcal{C}} C \sqcup \bigsqcup_{D \in \mathcal{D}} D.$$

Ce théorème est une conséquence du théorème de réduction semi-stable [**1**] de S. Bosch et W. Lütkebohmert. En suivant A. Ducros (*cf.* [**4**]), nous appellerons *triangulation de X* un triplet $\mathcal{S} = (S, \mathcal{A}, \mathcal{D})$ satisfaisant les conditions du théorème 2.1.

Soit X une courbe analytique connexe lisse sur k et soit $\mathcal{S} = (S, \mathcal{A}, \mathcal{D})$ une triangulation de X. Pour tout $C \in \mathcal{C}$, notons I_C le squelette de la couronne C. On définit alors le squelette de $\mathcal{S}$ par

$$\Gamma_{\mathcal{S}} \coloneqq S \sqcup \bigsqcup_{C \in \mathcal{C}} I_C.$$

Lorsque $\Gamma_{\mathcal{S}}$ n'est pas vide, c'est un graphe localement fini et la courbe X se rétracte par déformation sur $\Gamma_{\mathcal{S}}$. Pour s'en convaincre, il suffit de combiner les rétractions par déformations des disques et des couronnes mentionnées à la section 2.1. La courbe analytique X, qui est *a priori* un graphe réel compliqué, possède donc un type d'homotopie très simple.

Comme dans le cas de la droite affine analytique $\mathbb{A}_k^{1,\mathrm{an}}$, on peut associer un type (qui est un entier compris entre 1 et 4) à tout point d'une courbe analytique X. Pour toute courbe dans une classe très large (qui contient, par exemple, les analytifiées de courbes algébriques), on connaît la courbe X dès

que l'on connaît l'ensemble de ses points de type 1 et 2, que nous noterons $X^{(1,2)}$. Dans la suite de ce texte, des considérations de théorie des modèles nous conduirons à n'étudier que ce sous-ensemble. Remarquons que, dans le cas de la droite, l'application $\eta_{a,r} \mapsto \overline{D}(a,r)$ réalise une bijection entre $\mathbb{A}_k^{1,(1,2)}$ et l'ensemble des disques fermés de k à rayon dans $|k|$.

3. Courbes analytiques et définissabilité

Le premier lien entre courbes analytiques est définissabilité provient de la description de $\mathbb{A}_k^{1,(1,2)}$ comme ensemble des disques fermés de k à rayon dans $|k|$. En effet, cet ensemble apparaît de façon naturelle dans l'étude de k du point de vue de la théorie des modèles. Avant d'expliquer ceci, donnons un court survol de certains concepts de base de théorie des modèles. Pour une introduction succincte au sujet, nous recommandons le texte **[2]** d'É. Bouscaren dans la Gazette des Mathématiciens.

Étant donné un langage $\mathcal{L}$ et une interprétation des symboles de $\mathcal{L}$ dans k, un sous-ensemble $\mathcal{L}$-définissable de k^n est l'ensemble des éléments de k^n qui satisfont une certaine $\mathcal{L}$-formule (de la logique du premier ordre). Par exemple, si $\mathcal{L}$ est le langage des anneaux $\mathcal{L}_{\text{ann}} = (+, -, \cdot, 0, 1)$ et l'interprétation dans k est l'interprétation canonique en tant qu'anneau, les ensembles

$$X = \{(x,y) \in k^2 : y^2 = x^3\} \quad \text{et} \quad Y = \{(x,y,z) \in k^2 : (\exists z)(xy = z^2)\}$$

sont des ensembles $\mathcal{L}_{\text{ann}}$-définissables car $y^2 = x^3$ et $(\exists z)(xy = z^2)$ sont des $\mathcal{L}_{\text{ann}}$-formules. Nous nous permettrons d'utiliser des paramètres de k dans nos formules. Ainsi, l'ensemble

$$Z = \{(x,y) \in k^2 : a_1x^2 + a_2y^2 = a_3\}$$

est-il un ensemble $\mathcal{L}_{\text{ann}}$-définissable, avec paramètres $a_1, a_2, a_3 \in k$.

On se convainc sans peine que tout fermé de Zariski de k^n est $\mathcal{L}_{\text{ann}}$-définissable. En outre, puisque nous avons supposé k algébriquement clos, le théorème de Chevalley-Tarski nous permet donner une description très simple des ensembles $\mathcal{L}_{\text{ann}}$-définissables de k^n : ils correspondent aux sous-ensembles *constructibles* de k^n, c'est-à-dire aux combinaisons booléennes finies de fermés de Zariski de k.

Pour étudier k en tant que corps ultramétrique, nous aurons besoin d'utiliser un langage $\mathcal{L}$ qui prenne en compte la valeur absolue. Plusieurs choix sont possibles. L'un d'eux est le langage *à trois sortes* $\mathcal{L}_3$ qui contient :

- une sorte pour k, dans le langage des anneaux $\mathcal{L}_{\text{ann}}$;
- une sorte pour le groupe de valeurs $|k^*|$, dans le langage des groupes ordonnés $(<, \cdot, 1, ^{-1})$ (noté multiplicativement), étendue d'un symbole pour l'élément 0, que l'on suppose plus petit que tout élément de $|k^*|$;
- une sorte pour le corps résiduel $\tilde{k}$ dans le langage des anneaux $\mathcal{L}_{\text{ann}}$;
- la valeur absolue $|\cdot| \colon k \to |k|$;
- une application résiduelle $\text{res}(x,y) \colon k^2 \to \tilde{k}$ qui envoie (x,y) sur le résidu de xy^{-1}, si $|x| \leqslant |y| \neq 0$, et sur 0 sinon.

Un ensemble $\mathcal{L}_3$-définissable est alors un sous-ensemble d'un produit fini de copies de k, $|k|$ et $\tilde{k}$ dont les éléments satisfont une certaine $\mathcal{L}_3$-formule, formée en utilisant les symboles introduits ci-dessus, des conjonctions, des négations et des quantificateurs existentiels. Par exemple, l'anneau de valuation k° et son idéal maximal $k^{\circ\circ}$ sont $\mathcal{L}_3$-définissables car $|x| \leqslant 1$ et $|x| < 1$ sont des $\mathcal{L}_3$-formules.

L'ensemble des disques fermés de k à rayon dans $|k|$ correspond au quotient de l'ensemble $\mathcal{L}_3$-définissable $k \times |k|$ par la relation d'équivalence $\mathcal{L}_3$-définissable

$$(a,r) \sim (b,s) \iff (\forall x)(|x-a| \leqslant r \leftrightarrow |x-b| \leqslant s).$$

On étend le langage $\mathcal{L}_3$ en un nouveau langage $\mathcal{L}_{\mathbb{B}}$ contenant une quatrième sorte, notée $\mathbb{B}$, qui correspond précisément à l'ensemble des disques fermés de k à rayon dans $|k|$. On ajoute également

au langage l'application quotient

$$\mathbf{b}\colon (a,r) \in k \times |k| \longmapsto \overline{D}(a,r) \in \mathbb{B}.$$

L'ensemble $\mathcal{L}_{\mathbb{B}}$-définissable $\mathbb{B}$ peut être vu comme l'analogue définissable de la droite de Berkovich $\mathbb{A}_k^{1,\mathrm{an}}$ (ou, plus précisément, de $\mathbb{A}_k^{1,(1,2)}$). Notons que l'on n'a pas accès aux points de type 3 ou 4 de $\mathbb{A}_k^{1,\mathrm{an}}$ de façon définissable. En effet, pour tout $r \in \mathbb{R}_{>0} \setminus |k^*|$, le disque fermé $D(0,r)$ n'est pas définissable, car on sait que tout sous-ensemble définissable de k est combinaison booléenne finie de disques centrés dans k à rayon dans $|k^*|$. Cet argument impose de restreindre l'étude aux points de type 1 et 2.

Au vu du théorème 2.1, il semble que l'on puisse associer à toute courbe analytique lisse sur k un ensemble $\mathcal{L}_{\mathbb{B}}$-définissable. Plusieurs difficultés se présentent cependant.

Tout d'abord, la notion de définissabilité requiert des conditions de finitude, or les ensembles S, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{D}$ peuvent être infinis. Dans le cas de S et $\mathcal{A}$, qui sont localement finis, le problème disparaît si l'on se restreint à la classe des courbes compactifiables (dont font partie toutes les analytifiées de courbes algébriques). L'ensemble $\mathcal{D}$, en revanche, est effectivement infini dès qu'il est non vide, ainsi qu'on l'observe dans l'exemple du disque fermé. On peut cette fois-ci résoudre le problème en remplaçant, pour chaque point s de S, la sous-famille infinie des disques de $\mathcal{D}$ dont le bord est le point s, par un paramétrage de cette famille par les $\tilde{k}$-points d'une courbe algébrique sur $\tilde{k}$ associée à s. (Dans le cas du disque unité fermé, le point s est le point $\eta_{0,1}$ et les disques ouverts sont paramétrés par les $\tilde{k}$-points de la droite affine $\mathbb{A}_{\tilde{k}}^1$.)

D'autre part, le théorème 2.1 utilise implicitement des isomorphismes en mentionnant des disques ou des couronnes de X, et il faut s'assurer que ces isomorphismes soient définissables. Nous devrons donc, au préalable, préciser le résultat du théorème 2.1 et montrer qu'existent des *triangulations définissables*. Une telle triangulation $\mathcal{S}$ comprend non seulement la donnée du triplet $(S, \mathcal{C}, \mathcal{D})$ mais aussi des isomorphismes entre les éléments de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ et des couronnes et disques de $\mathbb{A}_k^{1,\mathrm{an}}$, qui permettent d'associer à ces éléments des ensembles définissables de $\mathbb{A}_k^{1,(1,2)}$ (identifié à $\mathbb{B}$). Nous pouvons ainsi associer à X et $\mathcal{S}$ un ensemble $\mathcal{L}_{\mathbb{B}}$-définissable $X^{\mathcal{S}}$ donné par l'union disjointe des images des morceaux de la triangulation, ainsi qu'une bijection canonique $\varphi_S\colon X^{(1,2)} \to X^{\mathcal{S}}$.

Un point crucial de cette construction est sa fonctorialité. Étant donnés des courbes k-analytiques X_1 et X_2 munies de triangulations définissables $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ et un morphisme k-analytique $h\colon X_1 \to X_2$, notons $h_{\mathcal{S}_1\mathcal{S}_2}\colon X_1^{\mathcal{S}_1} \to X_2^{\mathcal{S}_2}$ l'unique application telle que le diagramme

$$\begin{tikzcd} X_1^{(1,2)} \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\varphi_{\mathcal{S}_1}"] & X_2^{(1,2)} \arrow[d, "\varphi_{\mathcal{S}_2}"] \\ X_1^{\mathcal{S}_1} \arrow[r, "h_{\mathcal{S}_1,\mathcal{S}_2}"] & X_2^{\mathcal{S}_2} \end{tikzcd}$$

commute. La fonctorialité de la construction se traduit par le théorème suivant. Rappelons qu'une fonction est dite définissable lorsque son graphe est définissable.

3.1. Théorème. — *Soit $h\colon Y_1 \to Y_2$ un morphisme entre courbes algébriques sur k. Soit $h^{\mathrm{an}}\colon X_1 \to X_2$ le morphisme correspondant, où $X_i = Y_i^{\mathrm{an}}$. Étant données des triangulations définissables $\mathcal{S}_i$ de X_i, l'application $h^{\mathrm{an}}_{\mathcal{S}_1\mathcal{S}_2}\colon X_1^{\mathcal{S}_1} \to X_2^{\mathcal{S}_2}$ est $\mathcal{L}_{\mathbb{B}}$-définissable.*

Nous renvoyons à [**3**, Théorème 4.12] pour une version plus précise de ce théorème. La notion informelle de « triangulation définissable » correspond à la notion de $\mathcal{L}_{\mathbb{B}}$-*façade*. Indiquons que le résultat vaut encore dans un cadre non algébrique (pour un morphisme quasi-fini entre courbes strictement k-affinoïdes).

4. Ensembles radiaux et applications

Soit X une courbe k-analytique lisse connexe et $\mathcal{S}$ une triangulation non vide de X. Notons $\Gamma_{\mathcal{S}}$ le squelette de $\mathcal{S}$ et $\tau_{\mathcal{S}} \colon X \to \Gamma_{\mathcal{S}}$ la rétraction associée.

Soit $x \in X$. Si $x \notin \Gamma_{\mathcal{S}}$, alors la composante connexe C_x de $X \setminus \Gamma_{\mathcal{S}}$ contenant x est isomorphe au disque unité ouvert $\mathbb{D}(0,1)^-$. Si le point x n'est pas de type 4, il peut s'écrire sous la forme $\eta_{a,r}$. Posons $\rho_{\mathcal{S}}(x) := r$. Cette quantité ne dépend pas des choix. La définition s'étend par continuité aux points de type 4. Si $x \in \Gamma_{\mathcal{S}}$, on pose $\rho_{\mathcal{S}}(x) := 1$.

Un sous-ensemble Y de X est dit *radial basique relativement à* $\mathcal{S}$ si l'on se trouve dans l'un des deux cas suivants :

i) il existe $x \in S^{(2)}$, $r_1, r_2 \in [0,1] \cap |k|$ et $\bowtie_1, \bowtie_2 \in \{<, \leqslant\}$ tels que
$$Y = \{y \in \tau_{\mathcal{S}}^{-1}(x) : r_1 \bowtie_1 \rho_{\mathcal{S}}(y) \bowtie_2 r_2\} \ ;$$

ii) il existe une couronne C de squelette I_C, des fonctions $|k^*|$-monomiales $f_1, f_2 \colon I_C \to [0,1]$ et $\bowtie_1, \bowtie_2 \in \{<, \leqslant\}$ tels que
$$Y = \{y \in \tau_{\mathcal{S}}^{-1}(I) : f_1(\tau_{\mathcal{S}}(y)) \bowtie_1 \rho_{\mathcal{S}}(y) \bowtie_2 f_2(\tau_{\mathcal{S}}(y))\}.$$

Un sous-ensemble Y de X est dit *radial relativement à* $\mathcal{S}$ si, pour tout $x \in S^{(2)}$, $Y \cap \tau_{\mathcal{S}}^{-1}(x)$ est une union finie d'ensembles radiaux basiques et, pour chaque couronne $C \in \mathcal{C}$, $Y \cap \tau_{\mathcal{S}}^{-1}(I_C)$ est une union finie d'ensembles radiaux basiques. On note $\mathrm{Rad}_k(X)$ l'ensemble des sous-ensembles radiaux de X (relativement à une triangulation $\mathcal{S}$ qui peut varier).

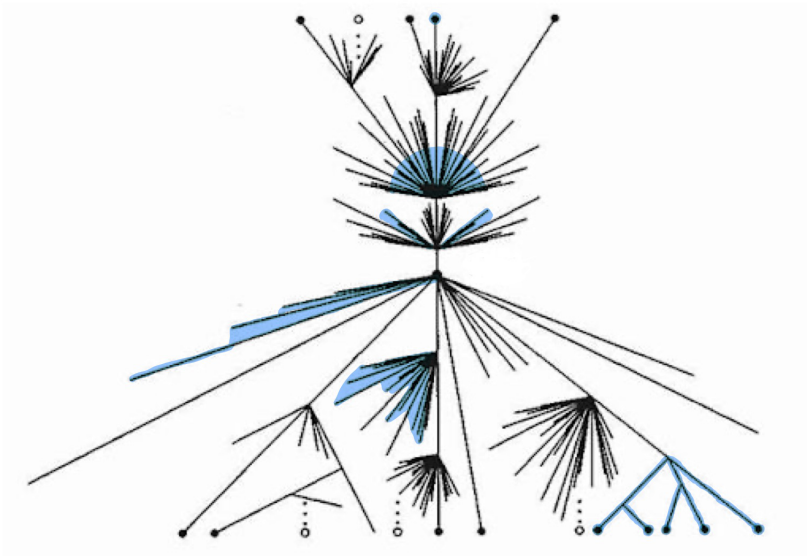

FIGURE 3. En bleu, un sous-ensemble radial de la droite de Berkovich $\mathbb{A}_k^{1,\mathrm{an}}$.

La notion d'ensemble radial est inspirée de la notion de *morphisme radial* due à M. Temkin (*cf.* [**6**]). Elle formalise l'idée d'un sous-ensemble défini par des conditions métriques naturelles, comme celui décrit à la section 2.3. Le théorème suivant montre que les ensembles radiaux sont fortement liés aux ensembles définissables de $X^{\mathcal{S}}$, où $\mathcal{S}$ est une triangulation définissable de X.

On définit $\mathrm{Def}_k(X^{\mathcal{S}})$ comme étant la collection des sous-ensembles définissables de $X^{\mathcal{S}}$. Notons que la fonctorialité de notre construction (théorème 3.1) implique en particulier que, si $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ sont

deux triangulations définissables de X, alors les collections $\mathrm{Def}_k(X^{\mathcal{S}_1})$ et $\mathrm{Def}_k(X^{\mathcal{S}_2})$ sont en bijection. Rappelons que l'application $\varphi_{\mathcal{S}}\colon X^{(1,2)} \to X^{\mathcal{S}}$ désigne la bijection canonique entre $X^{(1,2)}$ et l'ensemble définissable $X^{\mathcal{S}}$.

4.1. Théorème. — *L'application*

$$\delta_k\colon Y \in \mathrm{Rad}_k(X) \mapsto \varphi_{\mathcal{S}}(Y^{(1,2)}) \subseteq X^{\mathcal{S}}$$

induit une bijection entre $\mathrm{Rad}_k(X)$ *et* $\mathrm{Def}_k(X^{\mathcal{S}})$.

Soit $P \in k[T]$ un polynôme non constant et considérons le morphisme $\varphi\colon \mathbb{A}_k^{1,\mathrm{an}} \to \mathbb{A}_k^{1,\mathrm{an}}$ associé. Rappelons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons défini un sous-ensemble N_n de $\mathbb{A}_k^{1,\mathrm{an}}$ par

$$N_n := \{x \in \mathbb{A}_k^{1,\mathrm{an}} : \sharp\varphi^{-1}(x) = n\}.$$

Il s'agit visiblement d'un sous-ensemble $\mathcal{L}_{\mathbb{B}}$-définissable de $\mathbb{A}_k^{1,(1,2)}$. Le théorème 4.1 entraîne donc que N_n est un ensemble radial, ce qui est cohérent avec la description proposée dans la section 2.

Une généralisation directe de ce raisonnement montre que l'ensemble des points de multiplicité d (pour un d fixé) d'un morphisme $f^{\mathrm{an}}\colon X^{\mathrm{an}} \to Y^{\mathrm{an}}$ (où $f\colon X \to Y$ est un morphisme entre courbes algébriques sur k) est radial. Nous retrouvons ainsi un résultat de M. Temkin dans [**6**]. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur à [**3**, théorème 7.21].

Références

[1] S. Bosch & W. Lütkebohmert – « Stable reduction and uniformization of abelian varieties. I », *Math. Ann.* **270** (1985), no. 3, p. 349–379.

[2] E. Bouscaren – « Introduction à la théorie des modèles », *Gazette des Mathématiciens* (2016), no. 149, p. 18 – 32.

[3] P. Cubides Kovacsics & J. Poineau – « Definable sets of Berkovich curves », *Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu* (2019), p. 1–65.

[4] A. Ducros – « La structure des courbes analytiques », manuscrit disponible en ligne à l'adresse `http://www.math.jussieu.fr/~ducros/trirss.pdf`.

[5] E. Hrushovski & F. Loeser – *Non-archimedean tame topology and stably dominated types*, Annals of Mathematics Studies, vol. 192, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2016.

[6] M. Temkin – « Metric uniformization of morphisms of Berkovich curves », *Advances in Mathematics* **317** (2017), no. Supplement C, p. 438 – 472.

Pablo Cubides Kovacsics, Mathematisches Institut der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf, Universitätsstr. 1, 40225 Düsseldorf, Germany. • *E-mail :* `cubidesk@hhu.de`

Jérôme Poineau, Université de Caen Normandie, Laboratoire de mathématiques Nicolas Oresme, CNRS UMR 6139, 14032 Caen cedex, France • *E-mail :* `jerome.poineau@unicaen.fr`