SUR LE MÉLANGE EXPONENTIEL DES FLOTS D'ANOSOV EN DIMENSION 3

ZHIYUAN ZHANG

ABSTRACT. Zhiyuan Zhang (CNRS et Université Sorbonne Paris Nord) présentent le travail [TZ] en collaboration avec Masato Tsujii (Université Kyushu) sur le mélange exponentiel des flots d'Anosov en dimension 3.

La théorie des systèmes dynamiques concerne l'étude du comportement des systèmes qui évoluent au fil du temps. L'étude des systèmes dynamiques a été initiée par les tentatives de comprendre les questions liées à la nature et à la géométrie, par des personnes telles que Newton, Poincaré, Birkhoff, Kolmogorov, etc. La théorie ergodique est une branche centrale de la théorie des systèmes dynamiques qui étudie les propriétés de la dynamique des systèmes en relation avec leur structure géométrique et leurs propriétés statistiques. Plus précisément, la théorie ergodique étudie les propriétés des trajectoires des systèmes dynamiques à long terme, en particulier leur comportement asymptotique et leur équilibre statistique. Un concept clé de la théorie ergodique est celui d'un système ergodique, qui est un système dynamique dont les trajectoires visitent uniformément toutes les parties de l'espace des états.

Le théorème ergodique de Birkhoff est un résultat fondamental de la théorie ergodique. Ce théorème établit une relation entre la moyenne temporelle et la moyenne spatiale d'une propriété pour un système ergodique.

Theorem 0.1. *Soit $T : X \to X$ une application préservant la mesure de probabilité μ. Supposons que μ est ergodique, i.e., $A = T^{-1}(A) \subset X$ implique $\mu(A) \in \{0,1\}$. Alors pour tout sous-ensemble mesurable $A \subset X$, pour présque tout $x \in X$ par rapport à μ, on a*

$$n^{-1} \sum_{i=0}^{n-1} 1_A(T^i(x)) \to \mu(A) \quad \textit{quand} \quad n \to \infty.$$

Il est important d'étudier l'aspect quantitatif de la vitesse de convergence des systèmes dynamiques, car cela nous permet de mieux comprendre la dynamique à long terme de ces systèmes et de prédire leur comportement futur. En particulier, la vitesse de mélange est liée à la vitesse à laquelle un système dynamique converge vers son état d'équilibre, c'est-à-dire à quelle vitesse le système atteint une configuration stable. Pour les systèmes uniformément hyperboliques, qui sont en quelque sorte aussi chaotiques que possible, ces questions sont comprises dans une large mesure depuis les années 70, puisque ce type de systèmes peut être modélisé par des systèmes symboliques, comme les décalages de type fini. En revanche, en présence d'un mélange de comportements chaotiques et non-chaotiques, l'étude du mélange quantitatif devient plus difficile. De nombreuses questions fondamentales restent encore sans réponse à ce jour.

1. LE FLOT D'ANOSOV

Le flot d'Anosov est un concept important dans la théorie des systèmes dynamiques car il est l'un des systèmes dynamiques les plus simples qui présentent à la fois des comportements hyperboliques et isométriques. Il a été largement étudié par les mathématiciens au cours des dernières décennies.

Les propriétés d'Anosov sont liées à la notion de contraction exponentielle. La définition précise est la suivante.

Definition 1.1. *On dit qu'un champ de vecteur X sur une variété compacte M génère un flot d'Anosov $(g^t)_{t\in\mathbb{R}}$ si en tout point $x \in M$ on a une décomposition*

$$T_xM = \mathbb{R}X(x) \oplus E^s(x) \oplus E^u(x)$$

préservée par le flot, c'est-à-dire que $(Dg^t)(E^*(x)) = E^*(g^t(x))$ *pour* $* \in \{s,u\}$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}$ *et* $x \in M$*. Pour toute métrique* $\|\cdot\|$ *sur* TM*, il existe* $C, \theta > 0$ *tels que*

$$\|Dg^t(v_s)\| \le Ce^{-\theta t}\|v_s\|, \quad t \ge 0, v_s \in E^s(x),$$
$$\|Dg^{-t}(v_u)\| \le Ce^{-\theta t}\|v_u\|, \quad t \ge 0, v_u \in E^u(x).$$

Il est connu que la décomposition ci-dessus de l'espace tangent TM est unique et continu. On dit que E^s et E^u sont respectivement le sous-espace stable et instable du flot d'Anosov $(g^t)_{t\in\mathbb{R}}$. Le sous-espace stable E^s est tangent à un feuilletage invariant de g^t avec des feuilles régulières, que nous appelons le feuilletage stable W^s. De même, E^u est tangent au feuilletage instable W^u de $(g^t)_{t\in\mathbb{R}}$.

Exemples:

1. Supposons que f est un difféomorphisme d'Anosov sur une variété compacte N. Nous définissons G^t sur $N \times \mathbb{R}$ par la formule $G^t(x,s) = (x, s+t)$. Il est clair que $(G^t)_{t\in\mathbb{R}}$ se descend à un flot d'Anosov $(g^t)_{t\in\mathbb{R}}$ sur une variété compacte $M = N \times \mathbb{R}/\{(x,s) \sim (f(x), s-1)\}$.
2. Le flot géodésique sur une variété compacte à courbure sectionnelle strictement négative est un flot d'Anosov.

On sait que pour chaque $x \in M$, la feuille instable W^u passant par x est dense dans M. Par conséquent, $(g^t)_{t\in\mathbb{R}}$ est *transitif*: Pour tous les ensembles ouverts U et V, il existe un certain $t > 0$ tel que $g^t(U) \cap V \neq \emptyset$.

Une notion plus forte est celle du *mélange topologique*. On dit que $(g^t)_{t\in\mathbb{R}}$ est topologiquement mélangeant si pour tous les ensembles ouverts U et V, il existe un certain $s > 0$ tel que $g^t(U) \cap V \neq \emptyset$ pour $t > s$. Le flot dans Exemple 1 n'est pas topologiquement mélangeant, tandis qu'il l'est dans Exemple 2.

2. Le conjecture de Bowen-Ruelle

Il est déjà connu de Dmitri Anosov [Ano] que le flot d'Anosov préservant le volume est ergodique par rapport au volume s'il est topologiquement mélangeant. En fait, nous pouvons en dire plus. Dans son article [BR], Rufus Bowen et David Ruelle ont obtenu le résultat suivant.

Theorem 2.1. *Un flot d'Anosov topologiquement mélangeant est mélangeant par rapport à toute mesure d'équilibre avec un potentiel de Hölder.*

On dit qu'un système dynamique $T : X \to X$ est mélangeant par rapport à une mesure de probabilité μ invariante par T si pour tout les ensembles mesurables A et B, on

$$\mu(A \cap T^{-n}(B)) \to \mu(A)\mu(B).$$

En fait, ils ont prouvé la même assertion pour une classe plus large de flots appelée "flots hyperboliques ". Dans le même article, ils se sont demandés si la vitesse de mélange est exponentiellement rapide. Peu de temps après, Ruelle a montré dans [Rue] qu'il existe des flots hyperboliques qui se mélangent de manière arbitrairement lente. Il est largement admis que la réponse à cette question est positive pour les flots d'Anosov, mais cette conjecture est toujours ouverte. Cela est communément connu sous le nom de conjecture de Bowen-Ruelle.

Conjecture 2.2. *Etant donné un flot d'Anosov topologiquement mélangeant, une mesure d'équilibre* μ *avec un potentiel de classe Hölder et deux fonctions de classe Hölder* ϕ*,* ψ*, il exsite* $C, \kappa > 0$ *tels que pour tout* $t > 0$ *on a*

$$|\int \phi \cdot \psi \circ g^t d\mu - \int \phi d\mu \int \psi d\mu| \le Ce^{-t\kappa}.$$

Il est connu que pour chaque fonction P de classe Hölder, il existe une unique mesure de probabilité μ invariante par g telle que la quantité ci-dessous soit maximisée

$$\int P\mu + h_\mu(g^1).$$

Cette mesure μ_P est appelée mesure d'équilibre avec le potentiel P. Par définition, μ_0 est la mesure unique qui maximise l'entropie. Pour un flot d'Anosov préservant le volume, la mesure de forme volume *Vol* est une mesure d'équilibre. En général, il existe une unique mesure d'équilibre μ_{SRB} (le mesure de Sinai-Ruelle-Bowen) telle que $(g^t)_* Vol$ converge vers μ_{SRB}.

3. Une brève présentation des progrès antérieurs

Vers l'année 1997, Nikolai Chernov a montré dans [Che] que la vitesse de mélange est exponentiellement étirée en supposant une condition géométrique sur l'intégrabilité conjointe entre E^s et E^u. Peu après, Dmitry Dolgopyat a réalisé une percée en prouvant le résultat suivant:

Theorem 3.1. *Supposons que $(g^t)_{t\in\mathbb{R}}$ est un flot d'Anosov tel que:*
(1) E^s et E^u sont de classe C^1,
(2) $E^s \oplus E^u$ n'est pas intégrable,
(3) et que la mesure conditionnelle instable de la mesure d'équilibre μ a la propriété de Federer.
Alors, $(g^t)_{t\in\mathbb{R}}$ est mélangeant exponentiellement vite par rapport à μ.

Sa méthode repose sur l'utilisation de partitions de Markov. C'est une union de variétés instables locales Δ, tel que le flot a un facteur qui est isomorphe à un flot spécial sur Δ avec une fonction de toit r. En bref, nous pouvons considérer la transformée de Laplace de $Cov(\phi, \psi\circ g^t) := \int \phi \cdot \psi \circ g^t d\mu$ comme une fonction de t. Nous avons une identité comme suit :

$$\int_0^\infty Cov(\phi, \psi\circ g^t)\exp(-st)dt = \sum_{k=1}^\infty \int_{x\in\Delta} \widehat{\Phi}_s(x)(\mathscr{L}_s^k \widehat{\Psi}_{-s})(x)dx$$

où $\widehat{\Phi}_s$ et $\widehat{\Psi}_{-s}$ sont respectivement certaines fonctions de classe Hölder définies sur Δ associées à ϕ et ψ, et $\mathscr{L}_s$ est l'opérateur RPF (Ruelle-Perron-Frobenius) complexe qui prend la forme ci-dessous:

$$\mathscr{L}_s u(x) = \sum_{y\in\sigma^{-1}(x)} \exp(-isr(x))J(y)u(y)$$

où σ est une application non-inversible sur Δ, et J est une fonction de classe Hölder définie sur Δ. La principale inégalité qu'il a établie est la suivante.

Lemma 3.2 (Inégalité de Dolgopyat)**.** *Il existe $C, \kappa > 0$, $a_0 > 0$ et $b_0 > 1$ tels que pour tout $a \in (-a_0, a_0)$ et $b \notin (-b_0, b_0)$, on a*

$$\|\mathscr{L}_{a+ib}^n u\|_{L^2} \le Ce^{-n\kappa}(\|u\|_{L^\infty} + \frac{1}{b}\|u\|_{Lip}).$$

Le travail de Dolgopyat a révélé une grande partie du mystère sur le mécanisme derrière le mélange exponentiel: C'est l'annulation de phases produit par l'integrabilité de $E^s \oplus E^u$. Ce type d'inégalités a depuis lors trouvé de vastes applications bien au-delà de l'étude des flots d'Anosov.

La condition que E^s et E^u soient de classe C^1 est très restrictive: Il y a déjà des flots en dimension 3 qui n'ont pas cette propriété. D'un autre côté, Carlangelo Liverani a prouvé le théorème suivant:

Theorem 3.3. *Supposons que $(g^t)_{t\in\mathbb{R}}$ est un flot d'Anosov préservant une forme de contact. Alors $(g^t)_{t\in\mathbb{R}}$ est mélangeant exponentiellement vite par rapport au volume.*

En utilisant une construction de certains espaces de Banach adaptés à la dynamique, Liverani a introduit une nouvelle méthode qui évite l'utilisation de partitions de Markov. C'est aussi une idée qui a de vastes implications et qui a étendu l'application aux systèmes qui n'admettent pas de partitions de Markov, ou aux problèmes où les partitions de Markov ne sont pas utiles (comme ceux liés à la dépendance aux paramètres).

Il existe plusieurs autres travaux importants liés à cette question. Par exemple:

(1) Michael Field, Ian Melbourne et Andrei Török ont montré dans [FMT] qu'un ensemble ouvert et dense de flots hyperboliques satisfait une vitesse de mélange plus rapide que toute puissance polynomiale pour les fonctions lisses.
(2) Oliver Butterley et Khadim War ont prouvé dans [BW] que si E^s est $C^{1+\varepsilon}$ et que $E^s \oplus E^u$ n'est pas intégrable, alors il y a un mélange exponentiel par rapport à sa mesure Sinai-Ruelle-Bowen.

4. Traiter la non-régularité

En 2016, Masato Tsujii de l'Université Kyushu a démontré dans [Tsu] le théorème suivant:

Theorem 4.1. *Un flot d'Anosov générique qui préserve le volume sur une variété compacte de dimension 3 se mélange exponentiellement vite par rapport au volume.*

Sa preuve repose sur la construction d'un certain espace de Hilbert adapté à la dynamique, en utilisant une décomposition en paquets d'ondes issue de son travaux avec Frédéric Faure comme [FT]. Sa preuve combine certaines observations géométriques et des outils d'analyse microlocale. En fait, au cœur du calcul, il y a une annulation de phases produite par la non-régularité de la feuilletage.

En 2020, en collaboration avec Tsujii, nous avons obtenu le résultat suivant dans [TZ].

Theorem 4.2. *Un flot d'Anosov de classe C^∞ se mélange exponentiellement vite par rapport à toute mesure d'équilibre avec un potentiel de classe Hölder.*

Nous utilisons la méthode originale de Dolgopyat basée sur la partition de Markov, mais nous devons regarder plus attentivement le lieu et l'échelle pour obtenir l'annulation de phases.

L'idée est la suivante: en partant d'un manque de régularité à l'échelle unitaire, aussi minime soit-il, nous pouvons le propager à une échelle arbitrairement petite en utilisant la dynamique. Pour cela, nous avons besoin d'une bonne mesure de la non-régularité. Nous utilisons un certain système de coordonnées $\{\iota_x\}_{x\in M}$ que nous appelons "normal coordinate system". Pour chaque point x, nous décrivons la torsion de E^s le long de W^u près d'un point x sous ι_x par une fonction T_x, que nous appelons "template function"(cette notion est apparue pour la première fois dans [Tsu]). Il s'avère qu'en choisissant $\{\iota_x\}_{x\in M}$ correctement, nous pouvons montrer que T_x satisfait une belle propriété d'équivariance:

$$T_x(\|Dg^t|_{E^u(x)}\|\tau) = \|Dg^t|_{E^s(x)}\|^{-1}T_{g^t(x)}(\tau) \mod Poly^d(\tau)$$

où d est une constante ne dépendant que de g, et $Poly^d$ désigne un polynôme de degré strictement inférieur à d. C'est le début de notre travail et cela nous permet de savoir précisément à quelle échelle nous devons nous attendre à une annulation des phases.

5. Travaux liés au mélange quantitatif

Il y a de nombreuses œuvres importantes liées au mélange quantitatif, et il est impossible de faire une enquête complète ici. Nous ne mentionnerons que quelques résultats qui sont étroitement liées au développement mentionné ici.

Il est connu, grâce à Pollicott-Sharp [PS], que l'inégalité de Dolgopyat peut être utilisée pour améliorer le terme d'erreur dans le comptage des orbites périodiques. Dans plusieurs travaux récents comme [Li, OW], des inégalités comme celle de Dolgopyat sont combinées avec d'autres outils comme sum-product estimate développé par Bourgain et al. pour produire des résultats intéressants. Certaines idées derrière l'inégalité de Dolgopyat ont également été utilisées dans [DJ] pour donner une preuve alternative du "principe d'incertitude fractal"précédemment développé par Bourgain, Dyatlov, Zahl, etc., qui a des applications dans différentes branches de l'analyse.

La méthode d'utilisation de l'espace de Banach dynamique a également connu un développement rapide. Des travaux importants incluent Gouëzel-Liverani [GL] et Baladi-Tsujii [BT]. Les grands succès récents dans cette direction incluent la continuation de la fonction zêta de Ruelle par Giulietti-Liverani-Pollicott [GLP] et Dyatlov-Zworski [DZ] et la démonstration du mélange exponentiel des billards par Baladi-Demers-Liverani [BDL], et bien plus comme [BD, FT].

Bien sûr, le flot d'Anosov est simplement un modèle simplifié de ce qui pourrait se produire dans la nature. Mais déjà cette ligne d'étude a révélé une riche interaction entre la dynamique, la géométrie et l'analyse. Nous sommes impatients de voir jusqu'où cette route nous mènera en profondeur et en complexité.

REFERENCES

[Ano] Anosov, D. V., *Geodesic flows on closed Riemann manifolds with negative curvature,* Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, No.**90** (1967), 3-210; Translated from the Russian by S. Feder. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1969.

[BD] Baladi, V., Demers, M. F., *On the measure of maximal entropy for finite horizon Sinai billiard maps*, Journal of the American Mathematical Society **33**, 381-449 (2020).

[BDL] Baladi, V., Demers, M. F. and Liverani, C., *Exponential decay of correlations for finite horizon Sinai billiard flows*, Invent. Math. **211** (2018), no. 1, 39-177.

[BR] Bowen, R., Ruelle, D., *The ergodic theory of Axiom A flows,* Inventiones mathematicae **29**, 181-202 (1975).

[BT] Baladi, V., Tsujii, M., *Anisotropic Hölder and Sobolev spaces for hyperbolic diffeomorphisms*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **57**(1):127-154, 2007.

[BW] Butterley, O., War, K., *Open Sets of Exponentially Mixing Anosov Flows,* J. Eur. Math. Soc. 22 (2020), no. 7, pp. 2253–2285.

[Che] Chernov. N. I., *Markov approximations and decay of correlations for Anosov flows*, Ann. of Math. (2), **147**(2):269-324, 1998.

[Dol] Dolgopyat, D., *On decay of correlations in Anosov flows,* Annals of mathematics **147** (1998) 357-390.

[DJ] Dyatlov, S., Jin, L., *Dolgopyat's method and the fractal uncertainty principle*, Analysis & PDE **11** (2018), 1457–1485.

[DZ] Dyatlov, S., Zworski, M., *Dynamical zeta functions for Anosov flows via microlocal analysis*, Annales de l'ENS **49** (2016), 543–577

[FMT] Field, M., Melbourne, I. and Török, A., *Stability of mixing and rapid mixing for hyperbolic flows*, Ann. of Math. (2), **166**, (2007), no.1, 269-291.

[FT] Faure, F., Tsujii, M., *The semiclassical zeta function for geodesic flows on negatively curved manifolds,* Inventiones mathematicae, volume **208**, pages 851–998 (2017).

[GLP] Giulietti, P., Liverani, C. and Pollicott, M., *Anosov flows and dynamical zeta functions,* Ann. of Math. (2), **178**(2):687-773, 2013.

[GL] Gouëzel, S., Liverani, C., *Banach spaces adapted to Anosov systems,* Ergodic Theory and Dynamical Systems (2), **26**(1):189–217, 2006.

[Li] Li, J., *Fourier decay, Renewal theorem and Spectral gaps for random walks on split semisimple Lie groups,* Annales Scientifiques de l'ÉNS Tome **55**, Fasc.6, pp 1613-1686, 2022.

[Liv] Liverani, C., *On contact Anosov flows,* Ann. of Math. (2), **159**(3):1275-1312, 2004.

[OW] Oh, H., Winter, D., *Uniform exponential mixing and resonance free regions for convex cocompact congruence subgroups of* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, Journal of the American Mathematical Society, Vol **29** (2016), 1069–1115.

[PS] Pollicott, M., Sharp, R., *Exponential error terms for growth functions on negatively curved surfaces*, American Journal of Mathematics, Vol. **120**, No. 5 (Oct. 1998) 1019-1042.

[Rue] Ruelle, D., *Flows which do not exponentially mix,* C.R.A.S. **296**, (1983) 191-194.

[Tsu] Tsujii, M., *Exponential mixing for generic volume-preserving Anosov flows in dimension three,* J. Math. Soc. Japan **70**, 2 (2018) 757-821.

[TZ] M. Tsujii, Z. Zhang, *Smooth mixing Anosov flows in dimension three are exponentially mixing,* Annals of Math. 197 (2023), Issue 1, 65-158.

ZHIYUAN ZHANG, INSTITUT GALILÉE UNIVERSITÉ PARIS 13, CNRS UMR 7539, 99 AVENUE JEAN-BAPTISTE CLÉMENT 93430 - VILLETANEUSE

Email address: zhiyuan.zhang@math.univ-paris13.fr